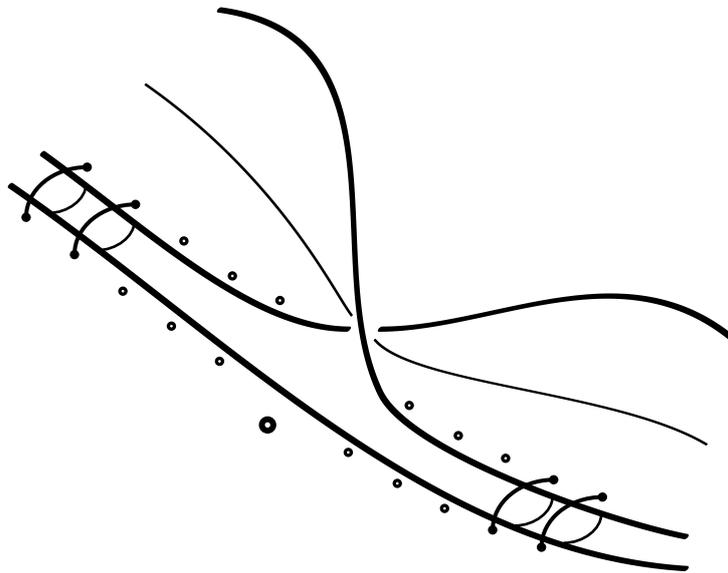


TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Classes caractéristiques, forme d'intersection et dimension quatre

Raphaël ALEXANDRE



Février – Juillet 2017
Université Pierre et Marie CURIE
IMJ-PRG, Paris

Encadré par Julien MARCHÉ
Rapport de stage

Préface

1 SUR LE DÉROULEMENT DU STAGE

J'ai effectué mon stage sous la supervision de Julien MARCHÉ à l'Institut Mathématique de Jussieu Paris Rive Gauche (IMJ-PRG) du premier février au premier juillet de l'année 2017.

Très tôt, nous avons convenu que ce stage porterait sur de la topologie (algébrique) au croisement avec la géométrie. J'ai travaillé en assez large autonomie, avec J. MARCHÉ nous nous voyions régulièrement afin de discuter de mes diverses questions et avancements.

Nous avons fixé pour objectifs initiaux de traiter le théorème de la signature tel qu'exposé dans [MS74], puis de s'intéresser à des surfaces complexes et à la géométrie en dimension quatre avec pour référence initiale [GS99]. Ces objectifs initiaux ont été globalement remplis et ils articulent le discours de ce mémoire.

En plus de ces objectifs, certaines questions supplémentaires ont été abordées. Par exemple, nous avons discuté d'un problème que je me suis posé concernant les classes de STIEFEL-WHITNEY. Ce problème est exposé au chapitre 1 et plus précisément à la section 3.

D'autres sujets se sont aussi imposés par eux-même, du fait des outils nécessaires au traitement des objectifs initiaux. Par exemple, la théorie de l'intersection et la théorie de LEFSCHETZ se sont révélées nécessaires et elles figurent dans ce mémoire.

Par ailleurs, en fin de stage nous avons commencé à discuter un peu plus en détails de géométrie algébrique, domaine qui m'était largement inconnu et auquel j'ai commencé à me former vers la fin de mon stage.

Il m'aurait fallu encore quelques mois de formation pour pouvoir exposer plus en détails ces questions dans mon mémoire. J'ai préféré laisser le lecteur se diriger vers des références en géométrie algébrique et me concentrer sur la discussion de liens entre géométrie et topologie.

J'ai beaucoup apprécié ce stage. J'avais organisé mon année autour de cours pour me former en topologie algébrique, et j'ai eu l'occasion de réutiliser toutes les connaissances acquises et même pousser plus loin ma formation dans ce domaine. J'ai aussi pu me rendre compte d'un grand nombre de liens profonds qui existent entre géométrie et topologie, ça a été une vraie révélation et une nouvelle source de curiosité pour ces prochaines années.

Aussi, j'ai énormément apprécié la liberté que j'ai eue quant aux sujets que j'ai traités et aux questions que j'ai pu me poser. J. MARCHÉ a toujours su me guider, même dans mes questions les plus vagues et mal posées.

2 REMARQUES SUR L'ÉCRITURE DE CE MÉMOIRE

Le stage s'étant terminé en juillet, la rédaction du mémoire s'est essentiellement faite durant l'été 2017. J'avais déjà pris de nombreuses notes durant la période de stage mais

il restait à élaborer un plan et à soigner une rédaction.

De nombreuses contraintes se sont rapidement manifestées. La plus importante a été la suivante. Comment rendre compte de tout ce que j'ai vu pendant mon stage en une longueur raisonnable ?

Le point de départ de ce mémoire est déjà mathématiquement élaboré, il me paraît illusoire de chercher à lire ce mémoire en entier sans avoir eu de formation en topologie algébrique ou *a minima* en géométrie algébrique puisque certains ponts existent et sont parfois explicités.

S'il avait fallu exposer toute la théorie préliminaire, ce mémoire n'aurait jamais été lisible, de par sa trop grande longueur. Je prie donc le lecteur d'accepter le parti pris.

Une autre difficulté a été de rendre compte de la pratique de ces mathématiques. L'exemple le plus parlant est le chapitre traitant de la théorie de l'intersection. Cette théorie coexiste en topologie algébrique et en géométrie algébrique. Cependant, déjà qu'il est difficile de la trouver clairement exposée en topologie algébrique, il est encore plus difficile de trouver une référence traitant du rapport entre la théorie topologique et la théorie géométrique (qui, elle, est très souvent exposée dans les livres classiques).

Pourtant, ces deux théories sont simultanément utilisées dès lors que des outils des deux domaines peuvent intervenir. C'est le cas dans ce mémoire puisque certains des objets étudiés ont leur origine en géométrie algébrique. Malheureusement, les quelques annexes que j'ai adjointes ne permettent pas de combler totalement la différence de pratiques, entre celle qui se produit en laboratoire, au tableau, et celle dans les livres.

D'autres difficultés venant de ce décalage entre la pratique en laboratoire et les écrits existent. Par exemple, toujours au sujet de la théorie de l'intersection, il n'est pas rare en topologie algébrique de considérer que les formes d'intersection soient définies sur les groupes de cohomologie (ou d'homologie) à coefficients entiers, alors que la construction formelle emploie les groupes à coefficients rationnels. Cette petite difficulté est facilement levée, mais elle révèle un décalage entre ce que l'on peut lire et ce qui est discuté, y compris par écrit.

Enfin, la dernière difficulté a été d'éviter l'effet catalogue consistant à n'exposer que de longues listes de résultats déjà exposés par d'autres auteurs (et bien souvent de façon talentueuse). Ma contribution étant très mince (à peine quelques pages sans conclusion atteinte), cette difficulté est rapidement arrivée.

J'ai donc essayé de faire un exposé en tenant compte de ces contraintes. Le fil conducteur a été le suivant : rendre compte de la pratique et en fournissant une partie d'outils théoriques dont l'approche sera motivée par l'idée de ce stage : mêler topologie et géométrie sur le terrain d'un sujet transverse.

J'ai aussi essayé autant que possible d'éviter les passages théoriques les moins éclairants quant aux sujets abordés. Ainsi, il arrivera parfois que certains théorèmes centraux ne soient pas démontrés. Cela ne signifie pas qu'ils puissent ou soient ignorés, mais simplement que j'ai jugé que leurs démonstrations n'étaient, ou bien non éclairantes pour la pratique, ou bien déjà exposées avec bien plus de talent que je ne pourrais le faire.

Sur les dessins

De nombreux dessins accompagnent ce mémoire, ils ont tous été réalisés par mes soins. Ils n'ont pas pour but de remplacer des preuves mais j'ai jugé qu'ils pourraient être utiles à la compréhension de certaines mathématiques présentées.

Les mathématiques en jeu étant aussi particulièrement évocatrices, j'ai parfois pris la liberté de proposer des dessins n'étant les illustrations d'aucun discours mathématique,

mais seulement de ma sensibilité au sujet.

Si le lecteur souhaite en réutiliser certains, je serais ravi de les communiquer sous simple demande, en l'échange de l'indication de leur origine lors de leur utilisation.

Sur la bibliographie

La bibliographie est construite pendant le corps de texte. Ainsi, toutes les références présentes sont introduites durant l'exposé. Cependant, j'ai personnellement certaines références à cœur puisqu'elles m'ont accompagné pendant la quasi totalité du stage. Il s'agit du livre de MILNOR et STASHEFF [MS74], du livre de GOMPF et STIPSICZ [GS99] et du livre de SCORPAN [Sco05].

L'ouvrage de MILNOR et STASHEFF est la référence classique universellement reconnue au sujet des classes caractéristiques. Il est très riche en sujets abordés et en problèmes proposés.

Le livre de GOMPF et STIPSICZ est plus récent et est aussi écrit dans un style différent. Ce livre traite du calcul de KIRBY, ce que je n'ai pas abordé dans mon stage, mais présente aussi de nombreux éléments sur la topologie en dimension quatre. Parfois très informel, ça a été pourtant une base importante dans mon stage pour connaître différentes directions où s'engager.

Enfin, la référence proposée par SCORPAN a été un fabuleux moyen de trouver des liens entre différents sujets et d'éclairer certaines de mes interrogations. Pensé comme un panorama des mathématiques en jeu en dimension quatre, il fournit de très nombreuses « Notes » très éclairantes. Plus lisible pour le vulgaire que [GS99], ce livre aborde des sujets souvent comparables et fournissait donc aussi un appui de lecture pour aborder le livre de GOMPF et STIPSICZ.

3 PRÉSENTATION DU SUJET

Plaçons nous dans $\mathbf{C}P^3$, muni des coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$, et regardons la surface complexe donnée par l'équation

$$z_0^4 - z_1^4 + z_2^4 - z_3^4 = 0.$$

Qu'est-il possible de dire sur la topologie de cette surface, que nous appellerons S_4 ?

Tout d'abord, on peut vérifier qu'il s'agit bien d'une surface complexe. On peut aussi s'assurer qu'elle est compacte et connexe. Pour aller plus loin, nous avons besoin d'outils de topologie algébrique et de géométrie. Par exemple, nous aimerions savoir si cette surface est simplement connexe. On aimerait aussi savoir quels sont ses groupes d'homologie singulière.

Pour traiter ces questions, les outils nécessaires sont bien plus élaborés que ceux qui ont été impliqués pour établir qu'il s'agissait d'une surface complexe compacte. Ces outils sont par exemple la théorie de LEFSCHETZ et la théorie de l'intersection.

Ces outils, et d'autres, seront présentés dans ce mémoire. Par exemple, nous montrerons que S_4 est simplement connexe et que $H_2(S_4; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}^{22}$.

Nous discuterons aussi d'autres questions. Par exemple, à l'aide de théorèmes difficiles au sujet des variétés de dimension (réelle) quatre, nous verrons que S_4 est homéomorphe à la variété

$$\overline{\mathcal{M}_{E_8}} \# \overline{\mathcal{M}_{E_8}} \# (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2). \text{ §1}$$

§1. La variété topologique \mathcal{M}_{E_8} sera exposée dans ce mémoire.

Mais ce mémoire exposera des outils dont la validité est bien plus grande que le cas des variétés complexe de dimension (complexe) deux.

L'un des enjeux principaux sera le théorème de la signature de HIRZEBRUCH. Ce théorème, de nature topologique, établit une rigidité importante entre les classes caractéristiques d'une variété différentiable et sa forme d'intersection.

Si M est une variété différentiable fermée de dimension $4k$, alors l'application donnée par

$$\alpha \cdot \beta = \int_M \alpha \wedge \beta,$$

où α et β sont deux formes différentielles de degré $2k$, est appelée *forme d'intersection* de M . Puisque M est de dimension $4k$, la quantité $\alpha \cdot \beta$ est un réel et la forme d'intersection est une forme bilinéaire symétrique. Ainsi, cette forme bilinéaire possède certains invariants à changement de base de $H^{2k}(M; \mathbf{R})$ près. Sa signature et son rang en font partie. On appellera *signature* de M , la signature de sa forme d'intersection et on la note traditionnellement $\sigma(M)$. De par sa définition, c'est un invariant topologique.

Le théorème de la signature de HIRZEBRUCH donne un moyen de calculer $\sigma(M)$. Mieux : la formule donnée est valable pour toutes les variétés de dimension $4k$. Par exemple, si $k = 1$ alors le théorème de la signature assure que

$$\sigma(M) = \frac{1}{3} \langle p_1(M), [M] \rangle$$

et le membre de droite peut être calculé de façon topologique par l'étude des classes caractéristiques de M .

En conclusion, ce mémoire se donne pour but d'aborder les sujets suivants. Tout d'abord, donner une série d'outils topologiques à l'étude des variétés différentiables. Ensuite, donner une démonstration du théorème de la signature de HIRZEBRUCH. Et, enfin, aborder les variétés de dimension quatre par le biais de ces outils.

Les principaux outils que nous étudierons sont fondés sur l'existence (et les premières propriétés) des classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY, CHERN, EULER et PONTRYAGIN. Ce mémoire étant déjà long, il a été préféré de laisser le lecteur se référer aux chapitres idoines de [MS74], qui est la référence classique du sujet. On pourra aussi comparer si besoin avec [Hat09] et [May].

Sommaire

Préface	i
1 Sur le déroulement du stage	i
2 Remarques sur l'écriture de ce mémoire	i
3 Présentation du sujet	iii
I TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE ET FORME D'INTERSECTION	1
1 Classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY	1
1 Première formule de WU et carrés de STEENROD	1
2 Deuxième formule de WU	6
3 Réalisations géométriques	10
A Théorie de l'obstruction	14
B Théorème de STIEFEL	15
2 Topologie de l'intersection	17
1 Classe de THOM, dualité et intersection	18
2 Le théorème de BÉZOUT	21
3 Forme d'intersection	23
A Plombage et variété \mathcal{M}_{E_8}	26
B Classe canonique	28
C Genre d'une courbe algébrique complexe	29
D Diviseurs et cohomologie singulière	29
3 Cobordisme	35
1 Résultats de THOM et PONTRYAGIN	37
2 Espace et théorie de THOM	39
4 Théorème de la signature	45
1 Séries multiplicatives	45
2 Théorème unificateur	47
3 Le théorème de la signature de HIRZEBRUCH	48
5 Théories de MORSE et de LEFSCHETZ	51
1 Résultats de théorie de MORSE	51
2 Théorie de LEFSCHETZ	53
II TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS DE DIMENSION QUATRE	57
6 Théâtre de la dimension quatre	57
1 Florilège de résultats	58
2 Sur la forme d'intersection des variétés lisses	60

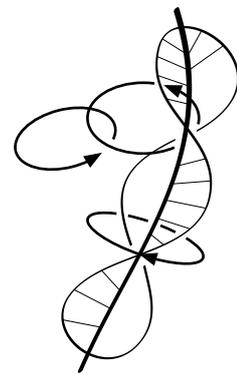
7	Surfaces elliptiques	63
1	Fibrations et surfaces elliptiques	63
2	Pinceau de cubiques de HESSE	68
8	Surface(s) $K3$	71
1	La surface S_4	71
2	Structure de surface elliptique	73
3	Calcul des fibres singulières	75
III	OUTRO	81
	Bibliographie	81
	Liste des figures	83

Première partie

Topologie algébrique et forme d'intersection

Chapitre 1

Classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY



Ce premier chapitre est dédié aux classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY. Elles jouissent d'une grande rigidité, particulièrement lorsqu'il s'agit de les évaluer sur des fibrés tels que tangent ou normal d'une variété lisse.

Ce sont les formules de WU qui expliciteront ces rigidités. La deuxième est la plus connue, mais la première ^{§1} est plus générale et nous sera utile.

Les outils obtenus permettront d'aborder une section plus originale. Étant donnés les zéros d'une classe totale de STIEFEL-WHITNEY, peut-on donner un exemple de variété lisse vérifiant exactement ces zéros ? On saura y répondre en dimensions une et deux. Ce sera plus difficile en dimension trois. On n'essayera pas d'aborder les dimensions supérieures, bien que certains outils seront facilement réutilisables (notamment en dimension quatre, où l'on peut se ramener à la dimension trois).

On gardera à l'esprit que la plupart des outils développés ici ne sont pas adaptables aux classes de CHERN. ^{§2} Ainsi, bien que ce chapitre ne semble pas directement lié au théorème de la signature et à la géométrie en dimension quatre, il apporte tout de même des résultats incontournables de topologie et permet d'aborder la question décrite ci-dessus.

1 PREMIÈRE FORMULE DE WU ET CARRÉS DE STEENROD

La première formule que l'on va démontrer porte sur la structure cohomologique de la grassmannienne G_n , qui est la limite inductive des grassmanniennes $G_{n,k}$

$$G_n := \bigcup_{k \geq 0} G_{n,k}$$

§1. Les désignations « première » et « deuxième » ne rendent pas compte d'une vérité historique ou formelle.

§2. Il ne s'agit pas seulement d'un manque de volonté, comme on le discutera au paragraphe (1.4, p. 5).

qui sont les ensembles des n -plans de \mathbf{R}^k . La cohomologie à coefficients dans \mathbf{Z}_2 de G_n (voir si besoin [MS74]) est isomorphe à l'algèbre graduée (avec pour produit l'opération de cup-produit) :

$$H^\bullet(G_n; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$$

avec w_i qui est de degré i .

1.1 Carrés de STEENROD

Nous allons introduire des opérations cohomologiques : les carrés de STEENROD. Ces opérations agiront sur la cohomologie de G_n et seront naturelles. Ces opérations et la naturalité des classes de STIEFEL-WHITNEY seront les ingrédients nécessaires à la première formule de WU.

Pour plus de clarté, on sous-entend à présent (lorsque cela n'est pas indiqué) que la cohomologie est à coefficients dans \mathbf{Z}_2 .

On donne ici la présentation axiomatique des carrés de STEENROD. Pour leur construction on pourra consulter par exemple [Bre93, p. 412].

DÉFINITION 1

On désigne par (X, Y) une paire d'espaces topologiques. §3

- (1) Pour tous entiers positifs n, i , il existe un homomorphisme additif

$$\text{Sq}^i : H^n(X, Y; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, Y; \mathbf{Z}_2)$$

appelé *carré i de STEENROD*.

- (2) Les carrés de STEENROD sont naturels : si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est une application continue entre paires, alors

$$\text{Sq}^i \circ f^* = f^* \circ \text{Sq}^i.$$

- (3) Si $a \in H^n(X, Y)$ alors $\text{Sq}^0(a) = a$, $\text{Sq}^n(a) = a \cup a$ (ce qui explique l'appellation de *carré*) et $\text{Sq}^i(a) = 0$ pour $i > n$.
- (4) Les carrés de STEENROD vérifie la formule de CARTAN :

$$\text{Sq}^k(a \cup b) = \sum_{i+j=k} \text{Sq}^i(a) \cup \text{Sq}^j(b).$$

En introduisant l'opération de *carré total*

$$\text{Sq}(a) := a + \text{Sq}^1(a) + \text{Sq}^2(a) + \dots \quad \S 4$$

alors la formule de CARTAN se réécrit

$$\text{Sq}(a \cup b) = \text{Sq}(a) \cup \text{Sq}(b).$$

Par la suite, on désignera par produit le cup-produit.

1.2 Première formule de WU

Commençons par traiter un exemple, qui sera en fait le seul résultat nécessaire pour les développements qui suivront dans ce mémoire.

On se donne pour but de montrer que :

$$\text{Sq}^1(w_2) = w_1 w_2 + w_3.$$

§3. Bien entendu, cette version relative permet d'établir le cas particulier (X, \emptyset) qui sera celui utilisé par la suite.

§4. Cette somme est toujours finie d'après les axiomes.

Pour ce faire, nous allons le montrer sur les fibrés vectoriels $\gamma^n \rightarrow G_n$, pour n entier. Il est clair que :

$$\text{Sq}^1(w_2(\gamma^0)) = \text{Sq}^1(0) = 0 = w_1(\gamma^0)w_2(\gamma^0) + w_3(\gamma^0).$$

Il s'agit donc maintenant de montrer l'hérédité : supposons que la formule soit vraie pour γ^k , alors on le montre pour la somme de WHITNEY $\gamma^k \oplus \gamma = \gamma^{k+1}$. On désigne par a la classe $w_1(\gamma)$ du dernier facteur et on désigne par w_i la classe de $w_i(\gamma^k)$. On obtient par la formule de CARTAN pour les classes de STIEFEL-WHITNEY :

$$\text{Sq}^1(w_2(\gamma^{k+1})) = \text{Sq}^1(w_2 + w_1a).$$

Par additivité et formule de CARTAN des carrés de STEENROD :

$$\begin{aligned} \text{Sq}^1(w_2 + w_1a) &= \text{Sq}^1(w_2) + \text{Sq}^1(w_1a) \\ &= \text{Sq}^1(w_2) + \text{Sq}^1(w_1)a + w_1 \text{Sq}^1(a). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence et les faits $\text{Sq}^1(a) = a^2$ et $\text{Sq}^1(w_1) = w_1^2$, on obtient :

$$\text{Sq}^1(w_2(\gamma^{k+1})) = (w_1w_2 + w_3) + (w_1^2a) + (w_1a^2).$$

D'autre part, par la formule de CARTAN pour les classes de STIEFEL-WHITNEY :

$$\begin{aligned} w_1(\gamma^{k+1})w_2(\gamma^{k+1}) + w_3(\gamma^{k+1}) &= (w_1 + a)(w_2 + w_1a) + (w_3 + w_2a) \\ &= w_1w_2 + w_1^2a + aw_2 + aw_1a + w_3 + w_2a \end{aligned}$$

et puisque $aw_2 + w_2a = 0$ et $aw_1a = w_1a^2$, on conclut.

Le cas général n'est pas très différent, il se montre par le même procédé.

THÉORÈME 2 (Formule de WU)

En posant, pour q entier (possiblement négatif) et $p \geq 0$,

$$\binom{q}{p} = \frac{q(q-1)\cdots(q-p+1)}{p!}$$

alors pour $k \leq m$:

$$\text{Sq}^k(w_m) = w_k w_m + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \binom{k-m}{2} w_{k-2} w_{m+2} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k}.$$

Remarquons que cette formule a été énoncée dans la cohomologie de G_n . Mais on peut par naturalité considérer que w_i désigne la i -ème classe de STIEFEL-WHITNEY d'un fibré vectoriel sur une base paracompacte.

La première conséquence topologique non triviale est la suivante.

COROLLAIRE 3

Pour E un fibré vectoriel sur une base paracompacte, si $w(E) \neq 1$ alors le plus petit $n > 0$ tel que $w_n(E) \neq 0$ est une puissance de 2.

PREUVE

On utilise le lemme suivant.

LEMME 4

Le coefficient $\binom{q}{k}$ est impair dès que q est un multiple impair de $k = 2^r$.

Supposons que

$$w(E) = 1 + w_{2^r n}(E) + \dots$$

avec n impair et différent de 1.

Alors en appliquant le théorème précédent pour $m = 2^r(n - 1)$ et $k = 2^r$, il vient :

$$0 = \text{Sq}^k(w_m(E)) = \binom{k-m}{k} w_{m+k} = w_{2^r n},$$

car $k - m$ est un multiple impair de k . ■

La preuve du lemme est combinatoire. On montre plus généralement que :

PROPOSITION 5

Si $a = \sum a_j 2^j$ et $b = \sum b_j 2^j$ alors

$$\binom{a}{b} = \prod \binom{a_j}{b_j} \pmod{2}.$$

PREUVE

Dans l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}_2[x]$, on a :

$$(1+x)^a = \prod (1+x)^{a_j 2^j} = \prod (1+x^{2^j})^{a_j} = \prod \sum_k \binom{a_j}{k} x^{k 2^j}.$$

Maintenant le coefficient de x^b est exactement $\binom{a}{b}$ et dans cette dernière expression on obtient $\prod \binom{a_j}{b_j}$. §5 ■

D'autres conséquences peuvent être trouvées dans [Bre93, p. 407] §6.

1.3 Isomorphisme et formule de THOM

Nous allons énoncer un lien entre le carré (total) de STEENROD d'une certaine classe cohomologique et la classe totale de STIEFEL-WHITNEY d'un fibré vectoriel. Pour cela, nous utiliserons l'isomorphisme de THOM. Cet isomorphisme et la classe de THOM seront plus longuement discuté en (1, p. 18), mais nous exposons ici rapidement les résultats utilisés.

Soit $\pi: E \rightarrow B$ un fibré vectoriel de rang n . On désigne par F une certaine fibre $\pi^{-1}(b)$. On désigne par F_0 l'ensemble des vecteurs non nuls de F et on désigne par E_0 l'espace total E privé de sa section nulle (qui est B). Puisque nous sommes à coefficients dans \mathbf{Z}_2 , le groupe de cohomologie

$$H^n(F, F_0) \simeq H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_0^n) \simeq \mathbf{Z}_2$$

a un unique élément non nul.

L'isomorphisme de THOM se construit à partir du résultat suivant.

THÉORÈME 6

Le groupe de cohomologie $H^i(E, E_0; \mathbf{Z}_2)$ est nul pour $i < n$ et $H^n(E, E_0; \mathbf{Z}_2)$ contient une unique classe u de sorte que pour chaque fibre F , la restriction

$$u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \mathbf{Z}_2)$$

est l'unique classe non nulle de $H^n(F, F_0; \mathbf{Z}_2)$.

§5. Pour en conclure le lemme, il faut remarquer qu'un changement de signe ne change pas la parité (la définition de $\binom{q}{k}$ dans le lemme englobe le cas où q est négatif).

§6. BREDON montre notamment le théorème de ADAMS par un argument de la sorte et après un travail préliminaire sur les fibrés de sphères.

De plus, l'application

$$\cup u: \begin{cases} H^k(E; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \mathbf{Z}_2) \\ x \mapsto x \cup u \end{cases}$$

est un isomorphisme pour tout k .

Cette classe u est appelée *classe de THOM*.

On trouvera une démonstration [MS74, p. 105]. L'idée est d'établir ce fait localement en prenant le cross-produit $\times e^n: H^j(B) \rightarrow H^j(B \times \mathbf{R}^n, B \times \mathbf{R}_0^n)$, puis d'étendre par MAYER-VIETORIS et limite inductive ce résultat sur B tout entier.

On remarque de plus que $\pi^*: H^k(B) \rightarrow H^k(E)$ est également un isomorphisme puisque E se rétracte par déformation sur B .

DÉFINITION 7

L'*isomorphisme de THOM* est la composition, ϕ , des isomorphismes :

$$H^k(B; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\cup u} H^{k+n}(E, E_0; \mathbf{Z}_2).$$

Maintenant que nous avons introduit cet isomorphisme, nous pouvons énoncer le fait suivant.

THÉORÈME 8 (Formule de THOM)

La i -ème classe de STIEFEL-WHITNEY de $E \rightarrow B$ vérifie :

$$w_i(E) = (\phi^{-1} \circ \text{Sq}^i \circ \phi)(1).$$

En d'autres termes, c'est l'unique classe de cohomologie telle que

$$\phi(w_i(E)) = \pi^*(w_i(E)) \cup u = \text{Sq}^i(u).$$

En termes de classes totales, cela donne

$$w(E) = (\phi^{-1} \circ \text{Sq})(u).$$

La preuve consiste à vérifier les axiomes des classes de STIEFEL-WHITNEY. On peut se référer par exemple à [MS74, p. 92].

1.4 Remarque sur la rigidité

Cette formule de THOM montre que l'on a une description des classes de STIEFEL-WHITNEY qui ne dépend que de deux données topologiques : un élément invariant à homotopie près, le carré de STEENROD, et une classe de cohomologie (qui elle peut être moins rigide), la classe de THOM.

On montrera dans la deuxième section que dans le cas des fibrés tangent et normal d'une variété lisse fermée, les classes de STIEFEL-WHITNEY sont bien elles-mêmes des invariants homotopiques. De façon générale, les classes de STIEFEL-WHITNEY d'une variété lisse ne dépendent pas de la structure lisse choisie (voir [Tho52, p. 151]).

C'est un fait absolument faux dans le cas des classes de CHERN qui ne sont même pas invariantes par difféomorphisme de la base. En effet, les classes de CHERN du fibré tangent dépendent fortement de la structure complexe.

Les classes de PONTRYAGIN ne sont pas non plus des invariants topologiques. Cependant, certaines combinaisons le sont (par exemple, celle donnant la signature, comme nous le verrons plus tard).

1.5 Homomorphismes de BOCKSTEIN

On conclut cette section par l'introduction des homomorphismes de BOCKSTEIN. Ce sont des opérations cohomologiques dont l'une est précisément Sq^1 . Les faits présentés ne sont pas démontrés dans le détail, mais on pourra se reporter à [Bre93] ou encore [Spa66].

Les homomorphismes de BOCKSTEIN sont introduits en étudiant les suites exactes courtes de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_{p^\alpha} \xrightarrow{\times p} \mathbf{Z}_{p^{\alpha+1}} \xrightarrow{\text{mod } p} \mathbf{Z}_{p^\alpha} \longrightarrow 0$$

ou encore

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbf{Z} \xrightarrow{\text{mod } p} \mathbf{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Bien que le cas général se traite de la même manière, nous nous intéressons aux cas suivants :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}_4 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Ces suites exactes de groupes abéliens induisent les suites suivantes de complexes de cochaînes (qui sont constitués de modules libres) sur un espace X :

$$0 \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}_2) \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}_4) \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}_2) \longleftarrow 0$$

$$0 \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}) \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}) \longleftarrow C^\bullet(X; \mathbf{Z}_2) \longleftarrow 0$$

et les morphismes de bord correspondants aux suites exactes longues en cohomologie sont les *homomorphismes de BOCKSTEIN* :

$$\beta: H^n(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbf{Z}_2)$$

$$\tilde{\beta}: H^n(X; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(X; \mathbf{Z}).$$

Le premier morphisme β est en fait Sq^1 .^{§7} En particulier, on a le diagramme commutatif suivant, où la première ligne est exacte et où ρ désigne le morphisme induit par la réduction modulo 2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^k(X; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\rho} & H^k(X; \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & H^{k+1}(X; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{2} & H^{k+1}(X; \mathbf{Z}) & \longrightarrow \\ & & & & \searrow & \downarrow \rho & & & \\ & & & & Sq^1 = \beta & H^{k+1}(X; \mathbf{Z}_2) & & & \end{array}$$

Ce diagramme nous sera utile dans la dernière section de ce chapitre.

2 DEUXIÈME FORMULE DE WU

Cette section est essentiellement tirée de [MS74, ch. 11]. Il va s'agir de se donner des outils topologiques pour avoir une description précise des classes de STIEFEL-WHITNEY du fibré tangent d'une variété lisse. Au passage, nous montrerons un théorème très utile de dualité.

Ainsi, les deux premiers paragraphes ne se limitent pas au contexte actuel, les hypothèses sont énoncées précisément pour que les résultats obtenus soient réutilisables. Les preuves manquantes peuvent être trouvées dans [MS74].

^{§7.} C'est une façon de montrer l'existence des carrés de STEENROD que de commencer par prendre $Sq^1 = \beta$ puis de construire les carrés suivants.

2.1 Préliminaires

Soit M une variété lisse. Dans ce qui suit on considère que les coefficients des groupes de cohomologie sont pris dans \mathbf{Z} si M est orientée et dans \mathbf{Z}_2 sinon. Dans tous les cas, M est munie d'une classe fondamentale, notée μ . On a aussi la classe génératrice (choisie en cohérence μ)

$$u' \in H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M)),$$

où l'on désigne par $\Delta(M)$ la diagonale de $M \times M$, qui est bien définie et non nulle. §8

La restriction de u' à $H^n(M \times M)$ définit la classe diagonale de cohomologie u'' . Cette classe vérifie le lemme suivant.

LEMME 1

Pour toute classe $a \in H^\bullet(M)$, le produit $(a \times 1) \cup u''$ est égal à $(1 \times a) \cup u''$.

On introduit maintenant le morphisme :

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y) \otimes H_\bullet(Y) \rightarrow H^\bullet(X)$$

défini par

$$a \otimes b \otimes \beta \mapsto a \langle b, \beta \rangle.$$

En remplaçant $H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(Y)$ par $H^\bullet(X \times Y)$ on obtient une opération, appelée *slant-produit*,

$$H^\bullet(X \times Y) \otimes H_\bullet(Y) \rightarrow H^\bullet(X)$$

désignée par

$$p \otimes \beta \mapsto p/\beta.$$

Pour β fixée, l'homomorphisme $p \mapsto p/\beta$ est $H^\bullet(X)$ -linéaire à gauche, c'est-à-dire que :

$$((a \times 1) \cup p)/\beta = a \cup (p/\beta)$$

pour tous $a \in H^\bullet(X)$ et $p \in H^\bullet(X \times Y)$.

LEMME 2

Supposons M compacte. Alors la classe diagonale de cohomologie $u'' \in H^n(M \times M)$ et la classe fondamentale d'homologie μ sont liées par l'identité

$$u''/\mu = 1.$$

2.2 Dualité

On suppose ici que les coefficients sont pris dans un corps Λ , que M est une variété fermée et que M est orientée ou alors que $\Lambda = \mathbf{Z}_2$.

THÉORÈME 3 (Dualité)

À toute base b_1, \dots, b_r de $H^\bullet(M)$ correspond une base duale $b_1^\sharp, \dots, b_r^\sharp$ de $H^\bullet(M)$ de sorte que

$$\langle b_i \cup b_j^\sharp, \mu \rangle = \delta_{ij}.$$

Cela montre en particulier que le rang de $H^k(M)$ est égal à celui de $H^{n-k}(M)$. Mieux, $H^k(M)$ est isomorphe à l'espace dual $\text{Hom}_\Lambda(H^{n-k}(M), \Lambda)$ par la correspondance $a \mapsto h_a$ avec $h_a(b) = \langle a \cup b, \mu \rangle$.

La preuve de ce théorème prouvera simultanément le fait suivant.

THÉORÈME 4

Avec $\{b_i\}$ et $\{b_i^\sharp\}$ comme précédemment, la classe diagonale de cohomologie u'' est

§8. Il s'agit essentiellement de faire une excision et d'observer que M est difféomorphe à la diagonale de $M \times M$.

égale à

$$u'' = \sum_{i=1}^r (-1)^{\dim b_i} b_i \times b_i^\sharp.$$

PREUVE

En utilisant la formule de KUNNETH

$$H^\bullet(M \times M) \simeq H^\bullet(M) \otimes H^\bullet(M),$$

il s'ensuit que la classe diagonale peut s'écrire

$$u'' = b_1 \times c_1 + \cdots + b_r \times c_r$$

avec les c_i bien définies dans $H^\bullet(M)$ et $\dim b_i + \dim c_i = n$.

En appliquant l'homomorphisme $/\mu$ à l'identité :

$$(a \times 1) \cup u'' = (1 \times a) \cup u''$$

on obtient, par linéarité à gauche, sur le membre de gauche

$$((a \times 1) \cup u'')/\mu = a \cup (u''/\mu) = a.$$

En substituant u'' par la première somme dans le membre de droite, il vient

$$\sum (-1)^{\dim a \dim b_j} (b_j \times (a \cup c_j))/\mu = \sum (-1)^{\dim a \dim b_j} b_j \langle a \cup c_j, \mu \rangle.$$

Aussi, cette dernière expression est égale à a . En remplaçant a par b_i , on obtient que le coefficient

$$(-1)^{\dim b_i \dim b_j} \langle b_i \cup c_j, \mu \rangle$$

de b_j est 1 si $i = j$ et 0 sinon. On pose $b_i^\sharp = (-1)^{\dim b_i} c_i$ et cela conclut. ■

2.3 Formule de WU

Dans ce paragraphe, on considère que M est une variété lisse, et les $w_i := w_i(\tau_M)$ désignent les classes de son fibré tangent, ou de façon équivalente du fibré normal de la diagonale de $M \times M$.

La formule de THOM (8, p. 5)

$$\text{Sq}^i(u) = (\pi^* w_i) \cup u$$

et l'isomorphisme

$$H^\bullet(E, E_0) \simeq H^\bullet(M \times M, M \times M - \Delta(M))$$

donnent

$$\text{Sq}^i(u') = (w_i \times 1) \cup u'.$$

En appliquant la restriction à $H^\bullet(M \times M)$ on obtient

$$\text{Sq}^i(u'') = (w_i \times 1) \cup u''.$$

Et comme

$$((w_i \times 1) \cup u'')/\mu = w_i \cup (u''/\mu) = w_i$$

on obtient le lemme suivant.

LEMME 5

Les classes de STIEFEL-WHITNEY de τ_M sont données par

$$w_i = \text{Sq}^i(u'')/\mu.$$

C'est ce qui montre que les classes de STIEFEL-WHITNEY ne dépendent que du type d'homotopie de M , lorsque M est fermée, puisque c'est alors le cas de u'' (qui est donnée par le théorème de dualité). §9

Le morphisme additif

$$x \mapsto \langle \text{Sq}^k(x), \mu \rangle$$

de $H^{n-k}(M) \rightarrow \mathbf{Z}_2$, donne par le théorème de dualité l'existence de

$$v_k \in H^k(M)$$

de sorte que

$$\langle v_k \cup x, \mu \rangle = \langle \text{Sq}^k(x), \mu \rangle$$

pour tout $x \in H^{n-k}(M)$.

En fait, en considérant M comme la réunion disjointe de ses composantes connexes, il est facile de vérifier que v_k satisfait la condition plus forte

$$v_k \cup x = \text{Sq}^k(x) \in H^n(M)$$

pour tout $x \in H^{n-k}(M)$. On gardera en vue que v_k est nulle dès que $k > n - k$. On définit la *classe totale de WU*, $v \in H^{\text{II}}(M)$ §10, comme étant $v := 1 + v_1 + \dots + v_n$.

Il s'ensuit que v satisfait et est même caractérisée par

$$\langle v \cup x, \mu \rangle = \langle \text{Sq}(x), \mu \rangle.$$

THÉORÈME 6 (Formule de WU)

Supposons M fermée. Alors la classe totale de STIEFEL-WHITNEY w de τ_M est égale à $\text{Sq}(v)$. En d'autres termes,

$$w_k = \sum_{i+j=k} \text{Sq}^i(v_j).$$

PREUVE

Soit $\{b_i\}$ une base de $H^\bullet(M; \mathbf{Z}_2)$. Par le théorème de dualité, on obtient la base duale $\{b_i^\sharp\}$.

Pour toute classe de cohomologie $x \in H^{\text{II}}(M)$, l'identité

$$x = \sum b_i \langle x \cup b_i^\sharp, \mu \rangle$$

est certainement vraie. En prenant $x = v$, on obtient

$$v = \sum b_i \langle v \cup b_i^\sharp, \mu \rangle = \sum b_i \langle \text{Sq}(b_i^\sharp), \mu \rangle.$$

Et donc

$$\text{Sq}(v) = \sum \text{Sq}(b_i) \langle \text{Sq}(b_i^\sharp), \mu \rangle = \sum (\text{Sq}(b_i) \times \text{Sq}(b_i^\sharp)) / \mu = \text{Sq}(u'') / \mu = w.$$

Ce qui conclut. ■

§9. Si M n'est pas fermée, c'est certainement faux. Par exemple, on pourrait prendre le ruban de MÖBIUS et sa rétraction sur le cercle central S^1 .

§10. Le groupe $H^{\text{II}}(M)$ désigne les éléments inversibles de l'algèbre graduée $H^\bullet(M)$, ces éléments s'écrivent $1 + a_1 + a_2 + \dots$ avec $a_i \in H^i(M)$ finiment non nuls.

Exemple. En dimension trois, la seule classe de WU potentiellement non nulle est v_1 . On a :

$$w_1(M) = v_1, \quad w_2(M) = v_1^2 \text{ et } w_3(M) = v_1^3.$$

On observe ainsi que tous les fibrés tangents de variétés fermées orientables de dimension 3 ont une classe totale de STIEFEL-WHITNEY triviale. Nous verrons en fait en annexe (B, p. 15) que toutes les variétés orientables de dimension 3 sont parallélisables (c'est-à-dire ont un fibré tangent trivial).

3 RÉALISATIONS GÉOMÉTRIQUES

Les deux sections précédentes ont introduit des outils qui nous permettent d'aborder la question suivante.

Soient $0 < n_1 < \dots < n_k$ des entiers. Existe-t-il un fibré vectoriel $E \rightarrow B$, dont la base est une variété lisse de dimension n , de sorte que

$$w_i(E) = 0 \iff i \in \{n_1, \dots, n_k\} ?$$

Avant de traiter cette question, mentionnons le fait suivant. Si E_1, E_2 sont deux fibrés vectoriels, alors en faisant la somme en un point de leurs bases, on peut obtenir un fibré vectoriel E tel que $w(E) = w(E_1) + w(E_2)$. Ainsi, il n'est pas utile de chercher exhaustivement des exemples à toutes les positions de zéros possibles, mais seulement celles contrôlées par le corollaire (3, p. 3) et la première formule de WU (2, p. 3).

Aussi, on peut supposer que la base est connexe. Dans le cas contraire, en considérant les différentes composantes connexes, on obtient aussi une somme des classes de STIEFEL-WHITNEY de ces composantes.

Enfin, nous allons classer les réponses selon la dimension de la base. Nous n'allons pas contraindre le rang du fibré vectoriel recherché.

On désignera par *forme* un cas de figure $w(E) = 1 + w_{i_1} + \dots + w_{i_n}$ où $w_{i_n}(E) =: w_{i_n}$ est non nul.

En dimensions une et deux

On peut explicitement donner les formes recherchés. On remarquera que tous les exemples sont donnés par des fibrés sur les projectifs réels $\mathbf{R}P^1$ et $\mathbf{R}P^2$.

Forme de $w(E)$	Réalisation
1	$\gamma^0 \rightarrow \mathbf{R}P^1$
$1 + w_1$	$\gamma^1 \rightarrow \mathbf{R}P^1$

TABLE 1.1 – En dimension $n = 1$

Forme de $w(E)$	Réalisation
1	$\gamma^0 \rightarrow \mathbf{R}P^2$
$1 + w_1$	$\gamma^1 \rightarrow \mathbf{R}P^2$
$1 + w_2$	$\gamma^2 \rightarrow \mathbf{R}P^2$
$1 + w_1 + w_2$	$\gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}P^2$

TABLE 1.2 – En dimension $n = 2$

3.1 En dimension trois

C'est en dimension trois que les difficultés apparaissent. Tout d'abord, la première formule de WU (2, p. 3)

$$\text{Sq}^1(w_2) = w_1 w_2 + w_3$$

prouve les faits suivants.

PROPOSITION 1

On a :

- (1) Si $w_2 = 0$ alors $w_3 = 0$.
- (2) Si $w_1 = 0$ alors, $Sq^1(w_2) = w_3$.

Notons au passage que le corollaire (3, p. 3) est conséquence de ces faits. On peut réaliser la plupart des cas possibles sans grande difficulté.

Forme	Réalisation
$w = 1$	$\gamma^0 \rightarrow \mathbf{R}P^3$
$w = 1 + w_1$	$\gamma^1 \rightarrow \mathbf{R}P^3$
$w = 1 + w_2$	$\gamma^2 \rightarrow \mathbf{R}P^3$
$w = 1 + w_1 + w_2$	$\gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}P^2 \times [0, 1]$
$w = 1 + w_1 + w_2 + w_3$	$\gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}P^3$
$w = 1 + w_2 + w_3$??

TABLE 1.3 – En dimension $n = 3$

Ici, $\gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}P^2 \times [0, 1]$ désigne le fibré tiré-en-arrière $pr_1^* \gamma^3$ de $\gamma^3 \rightarrow \mathbf{R}P^2$ et où pr_1 est la projection sur la première coordonnée de $\mathbf{R}P^2 \times [0, 1]$.

La question porte donc sur l'existence d'un fibré $E \rightarrow M^3$ tel que

$$w(E) = 1 + w_2 + w_3$$

avec w_2, w_3 non nuls dans $H^\bullet(M)$. Nous allons supposer que M est une variété fermée (connexe) de dimension 3.

Nous allons montrer les faits suivants :

THÉORÈME 2

Cette forme n'est pas réalisée si :

- (1) Le fibré est le fibré tangent ou normal de M ;
- (2) le groupe de cohomologie $H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ contient uniquement des carrés ;
- (3) la base M est orientable.

PREUVE (Premier point)

Supposons que le fibré tangent, τ , de M vérifie

$$w(\tau) = 1 + w_2 + w_3.$$

Remarquons tout d'abord que la dualité de WHITNEY montre que le fibré normal, ν , a pour classe :

$$w(\nu) = 1 + w_2 + w_3$$

et donc la question de réaliser cette forme est équivalente pour les fibrés τ et ν . On montre donc seulement que c'est impossible pour τ , ce qui conclura.

La deuxième formule de WU (6, p. 9) dit que :

$$w_3 = w_1^3 = 0$$

ce qui contredit donc la réalisation de la forme. ■

PREUVE (Second point)

C'est un simple fait algébrique :

$$Sq^1(a^2) = a Sq^1(a) + Sq^1(a)a = 2a^3 = 0.$$

Comme $w_3 = \text{Sq}^1(w_2)$ on en conclut que w_2 qui est un élément de $H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ ne peut pas être un carré. ■

En particulier, cette forme ne sera pas réalisable par $\mathbf{R}P^3$.

PREUVE (Troisième point)

On va utiliser ici le diagramme obtenu avec les homomorphismes de BOCKSTEIN $\tilde{\beta}$ et β :

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(M; \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & H^3(M; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{2} & H^3(M; \mathbf{Z}) & \longrightarrow & \\ & \searrow \text{Sq}^1 = \beta & \downarrow \rho & & & & \\ & & H^3(M; \mathbf{Z}_2) & & & & \end{array}$$

avec ρ qui désigne le morphisme induit par la réduction modulo 2. Rappelons que la première ligne de ce diagramme est exacte et le triangle est commutatif.

Bien sûr, $H^3(M; \mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$. Si maintenant M était orientable, alors $H^3(M; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}_2$ et alors la multiplication par deux, $2: H^3(M; \mathbf{Z}) \rightarrow H^3(M; \mathbf{Z})$, serait injective et donc $\tilde{\beta}$ serait nul. Mais alors $\text{Sq}^1 = \rho \circ \tilde{\beta}$ serait nul aussi et donc $w_3 = \text{Sq}^1(w_2)$ serait nul. ■

Aparté. À ce stade, il est tout à fait légitime de se demander s'il n'existe pas une formule de WU plus contraignante que celle à notre disposition. Existe-t-il seulement une variété ayant un fibré vectoriel dont la classe totale a les zéros recherchés ? La réponse est positive : en dimension 5, la variété de WU, $\text{SU}(3)/\text{SO}(3)$, a son fibré tangent qui est exactement donné par $1 + w_2 + w_3$. Ainsi, il n'existe pas de formule de WU plus contraignante et valable en toute dimension.

3.2 Piste de recherche

La démarche à présent va être d'essayer de décrire l'homologie et la cohomologie d'une variété qui donnerait une réalisation de la forme $1 + w_2 + w_3$.

La dualité de POINCARÉ pour l'homologie et la cohomologie à coefficients dans \mathbf{Z}_2 est à notre disposition. Bien sûr, on ne pourra pas utiliser de dualité de POINCARÉ avec des coefficients dans \mathbf{Z} puisque M ne peut pas être orientée. Les deux théorèmes de dualité nous donnent ainsi :

$$H^k(M; \mathbf{Z}_2) \simeq H_{3-k}(M; \mathbf{Z}_2) \text{ et } H^k(M; \mathbf{Z}) \simeq H^{3-k}(M; \mathbf{Z}).$$

De plus, on a à notre disposition le théorème des coefficients universels et la conséquence :

$$H^k(M; \mathbf{Z}) \simeq L_k \oplus T_{k-1},$$

où L_k est la partie libre du module $H_k(M; \mathbf{Z})$ et T_{k-1} la partie de torsion de $H_{k-1}(M; \mathbf{Z})$.

On va supposer à présent que $H^3(M; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$.

Ces isomorphismes permettent d'obtenir le tableau suivant récapitulatif des homologies et cohomologies de M . La première colonne s'intéresse au cas où les coefficients sont dans \mathbf{Z} et la seconde où ils sont dans \mathbf{Z}_2 .

\mathbf{Z}				\mathbf{Z}_2			
H_0	\mathbf{Z}	H^0	\mathbf{Z}	H_0	\mathbf{Z}_2	H^0	\mathbf{Z}_2
H_1	$L_1 \oplus T_1$	H^1	L_1	H_1	$H_1(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2$	H^1	$H_1(\mathbf{Z}_2)$
H_2	$L_2 \oplus \mathbf{Z}_2$	H^2	$L_2 \oplus T_1$	H_2	$H_1(\mathbf{Z}_2)$	H^2	$H_1(\mathbf{Z}_2)$
H_3	0	H^3	\mathbf{Z}_2	H_3	\mathbf{Z}_2	H^3	\mathbf{Z}_2

À présent, on constate que la suite exacte :

$$H^2(\mathbf{Z}) \xrightarrow{\rho} H^2(\mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\tilde{\beta}} H^3(\mathbf{Z})$$

montre que :

$$\rho(T_1) = T_1 \otimes \mathbf{Z}_2 \in \text{Ker}(\tilde{\beta}).$$

En effet,

$$H^2(\mathbf{Z}_2) \simeq H_1(\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \simeq (L_1 \oplus T_1) \otimes \mathbf{Z}_2$$

et la réduction modulo 2, $\rho: H^2(\mathbf{Z}) \rightarrow H^2(\mathbf{Z}_2)$, envoie exactement T_1 sur $T_1 \otimes \mathbf{Z}_2$ qui s'annule donc par $\tilde{\beta}$ d'après l'exactitude de la composition.

Si $\tilde{\beta}$ est injective. Alors $T_1 \otimes \mathbf{Z}_2 = 0$ et donc :

$$H^2(\mathbf{Z}_2) \simeq H_1(\mathbf{Z}_2) \simeq L_1 \otimes \mathbf{Z}_2.$$

La réduction modulo 2 envoie L_2 sur $L_2 \otimes \mathbf{Z}_2$ dans $L_1 \otimes \mathbf{Z}_2$. Pour avoir injectivité il faut que $L_2 = 0$ (puisque L_1 est libre). Aussi, le rang de L_1 doit être 1. Dans un tel cas de figure on obtient finalement :

		\mathbf{Z}		$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$			
H_0	\mathbf{Z}	H^0	\mathbf{Z}	H_0	\mathbf{Z}_2	H^0	\mathbf{Z}_2
H_1	$\mathbf{Z} \oplus T_1$	H^1	\mathbf{Z}	H_1	\mathbf{Z}_2	H^1	\mathbf{Z}_2
H_2	\mathbf{Z}_2	H^2	T	H_2	\mathbf{Z}_2	H^2	\mathbf{Z}_2
H_3	0	H^3	\mathbf{Z}_2	H_3	\mathbf{Z}_2	H^3	\mathbf{Z}_2

La réalisation de ce tableau par une variété est une question plus difficile qu'il n'y paraît au premier abord. La plupart des variétés de dimension 3 communément utilisées ne satisfont pas ces conditions. C'est donc une question laissée ouverte.

A THÉORIE DE L'OBSTRUCTION

Sans preuve, nous allons donner ici des éléments de théorie de l'obstruction. C'est une théorie qui permet de construire les classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY (et de façon analogue celles de CHERN) à partir du problème topologique qui suit. Les principales références utilisées sont [Ste51] et [MS74].

On considère E un fibré vectoriel (réel). Si E est de rang n alors sur chaque fibre de E , on peut exhiber une base de \mathbf{R}^n . Cette base est même valable localement par trivialisations locales. Mais est-il possible de la prolonger à tout E ? Si tel était le cas, alors E serait trivial, donc la réponse est généralement non.

Soit $V_k(E)$ le fibré de même base, qui à chaque point de la base associe un k -repère de la fibre correspondante dans E . En d'autres termes, les points de $V_k(E)$ sont de la forme $(x, v_1, v_2, \dots, v_k)$ avec (v_1, \dots, v_k) qui forme une famille libre de la fibre au-dessus de x dans E .

Une section de $V_k(E)$ correspond donc à la donnée d'un k -repère valable globalement. Par exemple, une section de $V_1(E)$ correspond à une section jamais nulle de E . Une section de $V_n(E)$ correspond à une trivialisations globale de E .

Les classes d'obstructions vont mesurer la difficulté à trouver une telle section de $V_k(E)$.

Désignons à présent par B la base du fibré E . Supposons que B ait une structure de CW-complexe (ce qui est toujours possible si B est une variété compacte).

THÉORÈME 1 (STEENROD)

Si E est de rang n alors il existe toujours une section de $V_k(E)$ au-dessus du $(n-k)$ -squelette de B .

Cette section est prolongeable au $(n-k+1)$ -squelette de B si, et seulement si, une certaine classe de cohomologie :

$$\sigma_{n-k+1} \in H^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}V_k(F)\})^{\S 11},$$

appelée *classe d'obstruction primaire*, est nulle.

Ainsi, il existe par exemple toujours une section jamais nulle de E au-dessus du $(n-1)$ -squelette de B . Cependant, pour obtenir une section jamais nulle globale, il faut regarder une certaine classe de cohomologie en degré n . Il s'avère que cette classe est la classe caractéristique d'EULER si E est orienté.

Posons $j = n - k + 1$, de sorte que

$$\sigma_j \in H^j(B; \{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F)\}).$$

THÉORÈME 2 (STEENROD)

Lorsque j est pair et strictement inférieur à n , alors $\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F)$ est cyclique d'ordre 2. Donc canoniquement isomorphe à \mathbf{Z}_2 .

Si j est impair ou égal à n , alors $\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F)$ est cyclique infini. Cependant il n'est pas canoniquement isomorphe à \mathbf{Z} .

Dans les deux cas, il existe un unique homomorphisme, h_* , non trivial de $\pi_{j-1}V_{n-j+1}(F)$ dans \mathbf{Z}_2 . Les classes

$$h_*\sigma_j \in H^j(B; \mathbf{Z}_2)$$

obtenues sont les classes de STIEFEL-WHITNEY de E .

Remarquons en particulier que les classes de STIEFEL-WHITNEY de degrés pairs strictement inférieurs à n sont exactement les classes d'obstruction primaire.

§11. Cet ensemble désigne un certain groupe de cohomologie à coefficients locaux. Aussi, $V_k(F)$ désigne l'ensemble des k -repères de F , une fibre de E .

B THÉORÈME DE STIEFEL

Avec la deuxième formule de WU et l'annexe précédente, on peut montrer le fait suivant :

THÉORÈME 1 (STIEFEL)

Toute variété orientée fermée, M , de dimension 3 est parallélisable.

Nous allons utiliser le fait qu'en dimension 3, les classes de STIEFEL-WHITNEY d'une variété fermée M sont données par :

$$w_1 = v_1, w_2 = v_1^2, w_3 = v_1^3.$$

Donc si M est orientable, toutes ses classes de STIEFEL-WHITNEY sont nulles.

PREUVE

Par la théorie de l'obstruction, la classe d'obstruction primaire σ_2 est nulle. Ainsi, il existe une section de $V_2(\tau_M)$ sur le 2-squelette de M .

Il faut maintenant étendre cette section au 3-squelette de M . Mais cela peut se faire cellule par cellule en cherchant à prolonger une application $S^2 \rightarrow V_2(\tau_M|_{S^2})$ à $D^3 \rightarrow V_2(\tau_M|_{D^3})$. Un tel prolongement est possible si, et seulement si, la classe d'homotopie d'une telle application est nulle. Mais, le disque étant contractile on a $V_2(\tau_M|_{D^3}) \simeq V_2(\mathbf{R}^3)$, et de plus :

$$V_2(\mathbf{R}^3) = \text{SO}(3)/\text{SO}(1) \simeq \mathbf{R}P^3/\{1\} \simeq \mathbf{R}P^3$$

et donc a

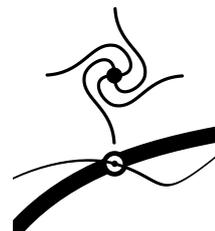
$$\pi_2(V_2(\mathbf{R}^3)) = 0.$$

On en conclut cette section se prolonge à M tout entier.

Il reste à compléter cette section de $V_2(\tau_M)$ en une section de $V_3(\tau_M)$. Pour cela, on fait le choix d'un produit scalaire sur les fibres de τ_M . On en conclut que τ_M est trivial puisqu'il existe une section de $V_3(\tau_M)$. ■

Chapitre 2

Topologie de l'intersection



Donnons nous un espace total E , sur lequel deux sous-variétés topologiques cohabitent : B et S . Comment qualifier topologiquement l'intersection de B avec S ?

L'intérêt d'une théorie de l'intersection est de pouvoir obtenir une grande quantité de résultats par le calcul. En effet, l'intersection est une donnée que l'on peut calculer géométriquement et une traduction topologique peut, ou bien apporter de nouveaux résultats (ou en prouver des anciens), ou bien permettre de calculer des invariants topologiques par la géométrie.

Par exemple, plaçons-nous dans \mathbf{CP}^2 et considérons deux courbes algébriques complexes (distinctes) C_1 et C_2 de degrés respectifs d_1 et d_2 . Le théorème de BÉZOUT nous indique que C_1 et C_2 s'intersectent en $d_1 d_2$ points, comptés avec multiplicité.

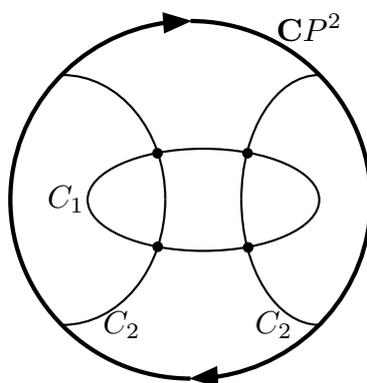


FIGURE 2.1 – Théorème de BÉZOUT avec C_1, C_2 de degré deux.

Ce résultat est de nature topologique : une variation de l'équation d'une des courbes (ou les deux) sans modifier le degré ne change pas le nombre de points d'intersection. Il y a donc là une traduction topologique possible.

Par ailleurs, on peut naturellement attribuer des classes cohomologiques aux quantités d_1, d_2 et $d_1 d_2$. En effet, la cohomologie de \mathbf{CP}^2 (à coefficients entiers) étant engendrée par g (de degré 2), on peut penser à d_1, d_2 et $d_1 d_2$ comme étant respectivement

$$\langle d_1 g \cup g, [\mathbf{CP}^2] \rangle, \langle d_2 g \cup g, [\mathbf{CP}^2] \rangle \text{ et } \langle d_1 d_2 g \cup g, [\mathbf{CP}^2] \rangle.$$

Il serait très esthétique de pouvoir faire la manipulation suivante. On associe à C_1 le cocycle $c_1 = d_1 g$ et à C_2 le cocycle $c_2 = d_2 g$, et on permet de calculer le nombre de points d'intersection par le cup-produit :

$$\langle c_1 \cup c_2, [\mathbf{CP}^2] \rangle = \langle d_1 g \cup d_2 g, [\mathbf{CP}^2] \rangle = d_1 d_2.$$

Par ailleurs, on voit que si on démontre qu'une telle manipulation est légale, alors le théorème de BÉZOUT en sera conséquence.

Le présent chapitre justifiera qu'une telle manipulation est correcte, ce résultat particulier sera discuté plus précisément en section 2.

Une autre conséquence géométrique d'une telle théorie sera le théorème de POINCARÉ-HOPF, qui relie les indices des zéros d'un champ de vecteurs et la caractéristique d'EULER-POINCARÉ d'une variété fermée (voir [Mil65]).

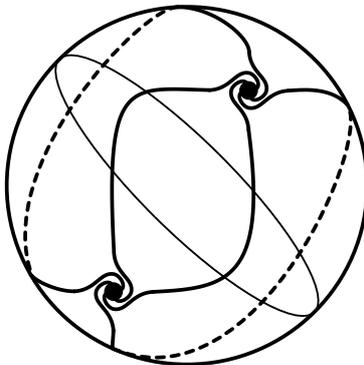


FIGURE 2.2 – Théorème de POINCARÉ-HOPF pour la sphère S^2 .

Par exemple dans le cas de S^2 , la classe d'EULER de son fibré tangent montrera que l'intersection d'une section générique avec S^2 (qui correspond alors aux zéros d'un champ de vecteurs) se fait en 2 points (comptés avec multiplicité, qui peut être négative), qui est bien la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de S^2 .

Le fait important pour ce théorème est que la classe d'EULER du fibré tangent est le dual de POINCARÉ de l'intersection d'une section générique avec la section nulle.

Enfin, le dernier objectif de ce chapitre, mais non le moins important, est d'introduire la forme d'intersection, qui sera absolument cruciale par la suite.

Cette forme d'intersection, on peut l'introduire de la façon suivante. Donnons-nous M une variété fermée orientée de dimension 4.^{§1} Alors sa cohomologie de DE RHAM fournit une forme bilinéaire symétrique :

$$Q: \alpha, \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta,$$

où α, β sont pris dans $H^2(M; \mathbf{Q})$. La symétrie vient de $\alpha \wedge \beta = (-1)^2 \beta \wedge \alpha$ et la bilinéarité est évidente.

Cette forme bilinéaire symétrique a certains invariants algébriques (par changement de base de $H^2(M; \mathbf{Q})$). Par exemple, elle a une signature et un rang. On montrera que si M est le bord d'une variété compacte, alors sa forme d'intersection est de signature nulle.

1 CLASSE DE THOM, DUALITÉ ET INTERSECTION

La classe de THOM est la clef de voûte de toute cette théorie. Nous avons déjà fait appel à cette classe et à l'isomorphisme de THOM lors du précédent chapitre. Cela nous avait permis de comprendre les classes de STIEFEL-WHITNEY comme le résultat de certaines opérations cohomologiques (les carrés de STEENROD) sur la classe de THOM.

^{§1}. La dimension 4 va nous intéresser tout au long de la seconde partie, mais ce qui suit se généralise sans peine aux dimensions $4k$.

Dans cette section, nous n'allons pas donner de démonstration. Selon les résultats on peut se reporter à [Bre93], [BT82] ou à [MS74]. L'objectif de cette section est de donner les théorèmes dans leurs formes suffisamment générales et de donner les résultats techniques permettant de relier l'intersection géométrique, la classe d'EULER, le cup-produit et la classe de THOM.

1.1 La classe de THOM

Soit Λ un anneau commutatif unitaire. Considérons un fibré vectoriel réel $E \rightarrow B$ de rang n et de base paracompacte. Une fibre, F , de ce fibré est diffeomorphe à \mathbf{R}^n , de sorte que :

$$H^n(F, F \setminus \{0\}; \Lambda) \simeq H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n \setminus \{0\}; \Lambda) \simeq \Lambda.$$

Ainsi, F est orientable, et une classe d'orientation est donnée par un générateur de Λ .

Désignons par $u|_F$ ce générateur. Aussi, pour plus de lisibilité, désignons par X_0 l'espace $X \setminus \{0\}$, pour X un espace vectoriel ou alors X un fibré vectoriel où 0 est la section nulle.

Localement autour de F , on peut trivialisier le fibré. Par exemple, on peut considérer un disque D au pied de F de sorte que si G est l'image inverse de D par la projection, alors

$$H^n(G, G_0; \Lambda) \simeq H^n(F, F_0; \Lambda)$$

et cet isomorphisme est canonique puisque D est contractile. Ainsi, $u|_F$ est une classe valable localement. On peut décrire plus précisément cet isomorphisme : en remarquant que $G \simeq F \times \mathbf{R}^n$, il s'en suit que l'isomorphisme réciproque est donné par $u|_F \mapsto u|_F \times e^n$, où e^n est la classe canonique de $H^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n_0; \Lambda)$.

Bien entendu, cette donnée locale ne saurait se globaliser sans hypothèse supplémentaire. Il s'agit tout d'abord de savoir si on peut Λ -orienter l'espace :

$$\bigsqcup_{F \subset E} (F, F_0) = (E, E_0).$$

Une telle Λ -orientation fournit une classe cohomologique :

$$u \in H^n(E, E_0; \Lambda)$$

qui se restreint à $u|_F$ sur (F, F_0) . On appelle *classe de THOM* un tel cocycle u . L'existence de u ne dépend que de l'existence d'une Λ -orientation de l'espace total E .

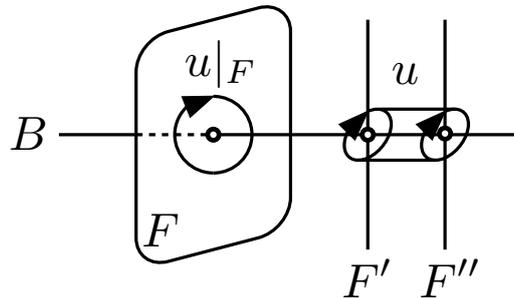


FIGURE 2.3 – La classe de THOM d'un fibré vectoriel.

Il reste à comprendre le rapport entre la paire (E, E_0) et les espaces E et B . C'est le contenu du théorème d'isomorphisme de THOM.

1.2 Le théorème d'isomorphisme de THOM

Soit Λ un anneau commutatif unitaire et $\pi: E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel Λ -orienté de rang n et de base paracompacte.

THÉORÈME 1 (THOM)

Il existe un cocycle, appelé *classe de THOM*,

$$u \in H^n(E, E_0; \Lambda)$$

tel que pour toute fibre F , la restriction de u à (F, F_0)

$$u|_{(F, F_0)} \in H^n(F, F_0; \Lambda)$$

est la classe induite par l'orientation de F . De plus,

$$\cdot \cup u: H^k(E; \Lambda) \rightarrow H^{k+n}(E, E_0; \Lambda)$$

est un isomorphisme.

Comme π^* fournit un isomorphisme en cohomologie (car B est un rétracte par déformation de E), la composition

$$H^k(B; \Lambda) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E; \Lambda) \xrightarrow{\cup u} H^{k+n}(E, E_0; \Lambda)$$

est encore un isomorphisme. On l'appelle *isomorphisme de THOM*.

Maintenant, le morphisme de restriction

$$H^n(E, E_0; \Lambda) \rightarrow H^n(E; \Lambda)$$

se prolonge par $\pi^*: H^n(E; \Lambda) \rightarrow H^n(B; \Lambda)$, de sorte que l'on obtient la composition :

$$H^0(B; \Lambda) \longrightarrow H^n(E, E_0; \Lambda) \longrightarrow H^n(B; \Lambda)$$

ou le premier morphisme est l'isomorphisme de THOM.

THÉORÈME 2

Dans le cas $\Lambda = \mathbf{Z}$, l'image par $1 \in H^0(B; \mathbf{Z})$ de cette composition est la classe d'EULER de E , $e(E) \in H^n(B; \mathbf{Z})$.

En d'autres termes, si u désigne la classe de THOM de E , alors

$$e(E) = \pi^*(u|_E).$$

1.3 Dualité et intersection

Donnons nous une hypothèse d'orientabilité (ou alors supposons que les coefficients sont dans \mathbf{Z}_2), de sorte que les variétés topologiques compactes B , S et E définissent toutes les trois une certaine classe fondamentale de leurs groupes maximaux respectifs d'homologie à coefficients dans \mathbf{Z} .

On désigne par $[B]$ et $[S]$ l'image des classes fondamentales de B et S dans l'homologie de E . Alors ces cycles de E correspondent sous la dualité de POINCARÉ à des cocycles dont les degrés respectifs sont les codimensions de B et S dans E . Désignons par b et s ces cycles. §2

Le cup-produit de ces cocycles, $b \cup s$, donne un cocycle dont le degré est la somme des degrés de b et s qui est aussi la codimension de l'intersection de B et S (sous l'hypothèse de transversalité). De sorte qu'en repassant à la dualité de POINCARÉ, $b \cup s$ est associé à

§2. Pour rappel, la dualité de POINCARÉ, PD, dit que b et s sont donnés par : $[E] \cap b = [B]$ et $[E] \cap s = [S]$.

un cycle qui est un bon candidat pour représenter la classe homologique de l'intersection de B et S .

On donne ici les résultats permettant de relier le cup-produit, la classe de THOM et l'intersection. Les preuves peuvent être trouvées dans [BT82, p. 125] et [Bre93, p. 372].

THÉORÈME 3

Si X est une variété lisse fermée orientée connexe, si A, B sont deux sous-variétés transverses orientées (selon X), alors dans l'homologie $H_\bullet(X; \mathbf{Z})$:

$$[A \cap B] = \text{PD} \left(\text{PD}^{-1}([A]) \cup \text{PD}^{-1}([B]) \right).$$

THÉORÈME 4

Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel réel orienté dont la base est une variété lisse fermée. Alors si S est une section avec un nombre fini de zéros, alors la classe d'EULER de E est le dual de POINCARÉ (dans B) des zéros de S comptés avec multiplicité.

En d'autres termes, et en supposant que S est transverse à B ,

$$e(E) = \text{PD}_{W(E)}^{-1}([S])|_B. \text{ §3}$$

2 LE THÉORÈME DE BÉZOUT

Comme annoncé en introduction, nous pouvons faire un retour sur le théorème de BÉZOUT avec un regard topologique.

Donnons-nous deux courbes projectives complexes C_1 et C_2 , de degrés respectifs d_1 et d_2 , dans $\mathbf{C}P^2$.

THÉORÈME 1 (BÉZOUT)

Les courbes C_1 et C_2 s'intersectent en $d_1 d_2$ points comptés avec multiplicité.

Pour faire usage de nos résultats topologiques, nous aurons besoin de l'hypothèse de transversalité. On suppose donc par la suite que C_1 et C_2 sont transverses.

Cette hypothèse formulée nous permet d'utiliser le fait que dans la cohomologie de $\mathbf{C}P^2$:

$$\text{PD}^{-1}([C_1 \cap C_2]) = \text{PD}^{-1}([C_1]) \cup \text{PD}^{-1}([C_2])$$

et puisque C_1 et C_2 sont deux courbes transverses, $[C_1 \cap C_2]$ est la classe homologique de points. Cela montre que cette égalité fait sens dans $H^4(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$. Aussi $\text{PD}^{-1}([C_1])$ et $\text{PD}^{-1}([C_2])$ sont des éléments de $H^2(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$.

Finalement, puisque $H^\bullet(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ est isomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}[g]/g^3$ avec g de degré 2, l'égalité se traduit par

$$ag^2 = a_1 g \cup a_2 g = a_1 a_2 g^2$$

et il s'agit de montrer que $a_1 = d_1$ et $a_2 = d_2$ puisqu'alors on a bien sûr $a = d_1 d_2$.

Mais pour montrer $a_1 = d_1$ et $a_2 = d_2$, on peut réitérer ce raisonnement avec cette fois-ci C_2 une droite et C_1 une courbe de degré d , §4 et il est alors équivalent de montrer que :

§3. On a désigné par $W(E)$ le fibré disque unité de E . C'est l'ensemble des $(x, v) \in E$ avec $|v| \leq 1$. De sorte que l'espace total de ce fibré est compact et orienté. Aussi, on peut montrer que la classe de THOM de E se concentre dans $W(E)$, et donc la classe d'EULER de E est donnée par la topologie de $W(E)$.

§4. Une droite n'étant jamais qu'une copie topologique de $\mathbf{C}P^1$, il est clair que sa classe de cohomologie associée est exactement g .

LEMME 2

Si C est une courbe projective complexe de degré d dans $\mathbf{C}P^2$, alors l'intersection de C avec une droite générique se fait en d points comptés avec multiplicité.

PREUVE

Supposons que C soit donnée par le polynôme homogène de degré d :

$$f(z_0, z_1, z_2) = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} z_0^i z_1^j z_2^k,$$

avec $[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbf{C}P^2$. Pour compter le nombre de points d'intersection de C avec une droite générique, il suffit de procéder au calcul pour une seule droite bien choisie.

Supposons que la droite $D = \{z_2 = 0\}$ soit transverse à C . Une telle hypothèse peut toujours être vérifiée, quitte à faire un changement de variable (il existe toujours une droite qui est transverse à C). Il s'agit alors de regarder les zéros du polynôme :

$$f(z_0, z_1, 0) = \sum_{i+j=d} a_{i,j,0} z_0^i z_1^j.$$

Supposons à présent que $[1 : 0 : 0]$ n'est pas dans C , c'est-à-dire $a_{1,0,0} \neq 0$. C'est une hypothèse que l'on peut toujours faire, quitte à procéder à un changement de variable. Ainsi, tous les points de $C \cap D$ sont dans la carte affine $z_1 = 1$. Ce sont donc les zéros du polynôme :

$$\sum_{i=0}^d a_{i,0,0} z_0^i$$

et il est bien connu qu'un polynôme à une variable complexe a exactement d racines comptées avec multiplicité. §5 ■

En réalité, le théorème de BÉZOUT (dans le cas du corps \mathbf{C}) est un fait plus général concernant n hypersurfaces de $\mathbf{C}P^n$.

THÉORÈME 3 (BÉZOUT)

Soit C_1, \dots, C_n des hypersurfaces de degrés respectifs d_1, \dots, d_n de $\mathbf{C}P^n$. Alors l'intersection $C_1 \cap \dots \cap C_n$ est constituée de $d_1 \dots d_n$ points comptés avec multiplicité.

Comme précédemment, nous allons réécrire ce problème en termes cohomologiques en utilisant une hypothèse de transversalité.

Ce qui change, c'est que le nouvel anneau de cohomologie est $\mathbf{Z}[g]/g^{n+1}$ où g est de degré deux. Aussi, comme une hypersurface donne une classe d'homologie de degré $2n-2$, le dual de POINCARÉ dans la cohomologie est une classe de degré 2 et donc s'écrit ag .

Pour chaque hypersurface C_i on associe ainsi le dual de POINCARÉ dans $\mathbf{C}P^n$ de $[C_i]$, $a_i g \in H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$. L'égalité

$$ag^n = a_1 g \cup a_2 g \cup \dots \cup a_n g,$$

montre qu'il s'agit de montrer que $a_i = d_i$. On aura alors $a = d_1 d_2 \dots d_n$, ce qui conclura comme précédemment.

De sorte que le théorème de BÉZOUT est équivalent à :

LEMME 4

Si C est une hypersurface de degré d dans $\mathbf{C}P^n$ alors, $PD^{-1}([C]) = dg$.

§5. Une très jolie démonstration du théorème de D'ALEMBERT-GAUSS est donnée dans [Mil65, pp. 8 et 9].

PREUVE

Tout comme dans la première version, il s'agit de compter le nombre de points de l'intersection de C avec $(n - 1)$ hyperplans.

Comme précédemment, on intersecte C avec les hyperplans $H_i = \{z_i = 0\}$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$. Il reste un polynôme homogène

$$\sum_{i+j=d} a_{i,j} z_0^i z_1^j$$

dont on peut supposer que les zéros sont dans la carte affine $z_1 = 1$. On conclut alors par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. ■

3 FORME D'INTERSECTION

À présent, on considère M une variété lisse fermée et orientée de dimension $4k$. La forme d'intersection, Q_M , de M est la forme bilinéaire symétrique :

$$(u, v) \mapsto u \cup v$$

définie sur $H^{2k}(M; \mathbf{Q})$ et à valeurs dans $H^{4k}(M; \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$.

Comme énoncé en introduction, la théorie de DE RHAM permet de réinterpréter cette forme comme étant

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

dans la cohomologie de DE RHAM de M .

Enfin, la section précédente permet de voir géométriquement cette forme d'intersection comme étant la traduction cohomologique de la forme d'intersection (dite géométrique)

$$([A], [B]) \mapsto [A \cap B]$$

définie sur $H_{2k}(M; \mathbf{Q})$ et à valeurs dans $H_0(M; \mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Q}$.

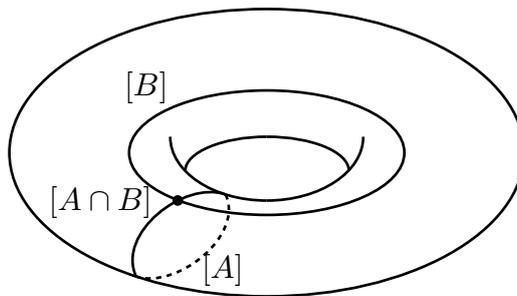


FIGURE 2.4 – Forme d'intersection.

Cependant, cette représentation suppose que l'on peut représenter A et B par des sous-variétés. THOM a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 1 (THOM dans [Tho54])

Toute classe homologique $\alpha \in H_k(M; \mathbf{Q})$ a un certain multiple $k\alpha$ représentable par la classe fondamentale d'une sous-variété orientée $A \subset M$.

Nous allons montrer une version plus faible, mais qui sera celle nécessaire dans la deuxième partie.

THÉORÈME 2

Si M est une variété fermée et orientée de dimension 4, alors toute classe α du

le groupe $H_2(M; \mathbf{Q})$ est représentable par une sous-variété $A \subset M$.

PREUVE

Montrons tout d'abord que toute classe de cohomologie $a \in H^2(M; \mathbf{Z})$ est représentable. Remarquons que $H^2(M; \mathbf{Z})$ est en bijection avec $[M, \mathbf{C}P^\infty]$ (qui sont les classes d'homotopies d'applications de M dans $\mathbf{C}P^\infty$). Mais les fibrés vectoriels complexes en droite sont exactement donnés par les éléments de $[M, \mathbf{C}P^\infty]$. De sorte qu'en fait, toute classe de $H^2(M; \mathbf{Z})$ correspond à la classe de CHERN d'un fibré vectoriel en droite complexe.

Maintenant, si $a = c_1(L)$ alors comme $c_1(L) = e(L)$, on obtient que a est le dual de l'intersection d'une section générique de L avec M . Donc a est représentable par cette même intersection.

Comme toute classe dans $H_2(M; \mathbf{Q})$ provient d'une classe de $H_2(M; \mathbf{Z})$, cela conclut. ■

La forme d'intersection Q_M possède des invariants algébriques (invariants par changement de base de $H^{2k}(M; \mathbf{Q})$). Par exemple sa signature, qui est la signature de Q_M diagonalisée comme forme bilinéaire dans le corps \mathbf{R} .

LEMME 3

Si M est une variété fermée orientée alors Q_M est unimodulaire.

PREUVE

C'est une conséquence directe du théorème de dualité (3, p. 7). ■

LEMME 4 (THOM)

Supposons que M soit le bord orienté d'une variété N compacte orientée de dimension $4k + 1$. Alors la signature de Q_M est nulle.

PREUVE

Prenons les coefficients dans \mathbf{R} . On utilise le diagramme suivant, obtenu par dualité de POINCARÉ pour les variétés à bords et les suites exactes courtes en homologie et cohomologie de la paire (N, M) .

$$\begin{array}{ccccc} H^{2k}(N) & \xrightarrow{j^*} & H^{2k}(M) & \longrightarrow & H^{2k+1}(N, M) \\ \text{PD} \downarrow & & \text{PD} \downarrow i & & \text{PD} \downarrow \\ H_{2k+1}(N, M) & \longrightarrow & H_{2k}(M) & \xrightarrow{j_*} & H_{2k}(N) \end{array}$$

On pose maintenant

$$A^{2k} := \text{Im } j^* \text{ et } K_{2k} := \text{Ker } j_*.$$

Comme ce sont des espaces vectoriels réels, le diagramme montre que :

$$A^{2k} \simeq \text{PD}^{-1}(H_{2k}(M)/K_{2k}) \text{ et } x \in A^{2k} \iff i(x) \in K_{2k}.$$

En désignant par b_k le k -ème nombre de BETTI de M (qui est la dimension de $H_{2k}(M)$ et de $H^{2k}(M)$), il vient

$$\dim A^{2k} = b_k - \dim K_{2k} = \dim K_{2k}$$

et donc

$$\dim A^{2k} = \frac{1}{2} b_k.$$

Maintenant, si $x = j^*y \in A^{2k}$ avec $y \in H^{2k}(N)$, alors

$$\langle x \cup x, [M] \rangle = \langle j^*(y \cup y), [M] \rangle = \langle y \cup y, j_*[M] \rangle = 0$$

et donc le cône isotrope de Q_M contient A^{2k} qui est de dimension $b_k/2$. Donc la signature de Q_M est nulle.

En effet, si on décompose Q_M selon une base de sorte que :

$$Q_M(v, v) = \sum_{i=1}^r x_i^2 + \sum_{j=1}^s (-y_j)^2$$

alors supposons par exemple que $r < s$. Comme la projection de A^{2k} sur x_i est injective (car A^{2k} est dans le cône isotrope), on a $b_k/2 \leq r$ mais cela contredit $r + s \leq b_k$ puisque $r + r = b_k < r + s$. ■

A PLOMBAGE ET VARIÉTÉ \mathcal{M}_{E_8}

Dans cette annexe, nous allons faire la construction d'une variété topologique dont la forme d'intersection sera prescrite. La construction est tirée de [Bre93, p. 426].

On considère ξ et η deux fibrés de fibre D^n au-dessus des bases M^n et N^n , deux variétés lisses. Localement, on peut prendre des voisinage trivialisants difféomorphes à D^n de sorte que

$$\xi|_A \simeq D^n \times D^n \text{ et } \eta|_B \simeq D^n \times D^n.$$

L'échange des facteurs : $\theta(x, y) = (y, x)$ entre les deux trivialisations fournit une application

$$\theta: \xi|_A \rightarrow \eta|_B.$$

On définit ainsi

$$P^{2n} := \xi \cup_{\theta} \eta$$

le recollement selon cette identification.

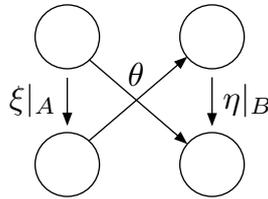


FIGURE 2.5 – Plombage.

A priori, P^{2n} n'est pas une variété lisse. Mais on peut régulariser ses coins et on admet maintenant que P^{2n} est une variété lisse. C'est le *plombage* de ξ et η .

Choisissons un arbre T et considérons $P^{2n}(T)$ le plombage obtenu à partir de sphères S^n en respectant T . C'est-à-dire que chaque sommet de T est une sphère S^n et une arête entre deux sommets représente le plombage des fibrés au-dessus de ces sommets.

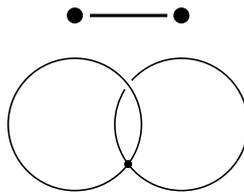
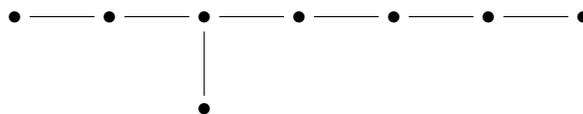


FIGURE 2.6 – Plombage de deux sphères.

On va maintenant s'intéresser à $Q^{2n-1} := \partial P^{2n}$. Le premier objectif est de calculer son homologie (à coefficients entiers). On va en fait considérer le cas où T est l'arbre suivant. Il correspond au *plombage de MILNOR*.



On constate (dans le cas général) que P^{2n} est homotopiquement équivalent à un bouquet de sphères S^n . Ainsi, l'homologie de P^{2n} est nulle sauf en les dimensions 0 et n . De

plus, $H_n(P^{2n})$ est libre, engendré par autant de générateurs que le nombre de sommets de T . D'autre part, on a le diagramme suivant, venant de la dualité de POINCARÉ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{n-1}(Q) & \longrightarrow & H^n(P, Q) & \longrightarrow & H^n(P) & \longrightarrow & H^n(Q) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(Q) & \longrightarrow & H_n(P) & \xrightarrow{j_*} & H_n(P, Q) & \longrightarrow & H_{n-1}(Q) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce diagramme et ce qui précède sur l'homologie de P montre que $H_\bullet(Q)$ est nulle sauf potentiellement en les dimensions $0, n - 1, n$ et $2n - 1$. Ainsi, il suffit de comprendre l'application

$$j_* : H_n(P) \rightarrow H_n(P, Q)$$

pour calculer $H_\bullet(Q)$.

La compréhension de cette application revient à examiner la composition de j_* avec les isomorphismes

$$PD : H_n(P, Q) \rightarrow H^n(P)$$

et

$$\beta : H^n(P) \rightarrow \text{Hom}(H_n(P); \mathbf{Z})$$

(cette dernière est bien un isomorphisme puisque l'homologie de P est libre). Cette composition envoie $a \in H_n(P)$ vers l'homomorphisme $\beta \circ PD \circ j_*(a)$, de sorte que si $b \in H_n(P)$ alors

$$\begin{aligned} [\beta \circ PD \circ j_*(a)](b) &:= \langle PD \circ j_*(a), b \rangle \\ &= \langle j^*PD(a), b \rangle \text{ d'après le diagramme} \\ &= \langle PD(a), j_*(b) \rangle \\ &= \langle PD(a), j^*PD(b) \cap [P] \rangle \text{ d'après le diagramme} \\ &= \langle PD(a) \cup j^*PD(b), [P] \rangle \\ &= \langle PD(a) \cup PD(b), [P] \rangle \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est l'indice de l'intersection entre b et a . Ainsi, la matrice de j_* est équivalente à la matrice d'adjacence, $I(T)$, §6 sur $H_n(P)$. Remarquons que $I(T)$ est symétrique si n est pair, et anti-symétrique si n est impair.

Le plombage de MILNOR donne comme matrice d'intersection pour P :

$$E_8 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & 1 & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette forme bilinéaire symétrique est très importante et fera son apparition dans la seconde partie du mémoire.

Dans le cas $n = 2$, nous obtenons une variété P^4 ainsi qu'une sphère d'homologie Q^3 . Par un théorème propre à la dimension 4, la variété $\overline{Q^3}$ (avec l'orientation contraire) borde une variété compacte contractile B^4 . Le recollement de P et de B le long de Q donne une variété fermée \mathcal{M}_{E_8} dont la forme d'intersection est E_8 .

Cette variété jouera un rôle important lorsque nous aborderons la géométrie en dimension 4. Par exemple, elle n'admet pas de structure lisse.

§6. Pour que ce soit vraiment la matrice d'adjacence, il faut rajouter une boucle sur chaque sommet.

B CLASSE CANONIQUE

Nous pouvons formuler un autre lien profond entre géométrie algébrique et topologie algébrique.

Si X est une variété algébrique complexe de dimension n , alors à X on peut associer son *fibré canonique*, $\det_{\mathbf{C}} T^*X$. Ce fibré peut être défini de façon purement algébrique. Aussi, on appelle *classe canonique* le diviseur de ce fibré en droite, on la désigne par K_X .

Mais le diviseur d'un fibré en droite est en fait la première classe de CHERN de ce même fibré (voir l'annexe D qui suit). Par le *splitting-principle* on a

$$K_X = c_1(\det_{\mathbf{C}} T^*X) = c_1(T^*X) = -c_1(X)$$

et donc cette classe peut être calculée topologiquement.

Prenons par exemple le cas des hypersurfaces de degré d de $\mathbf{C}P^n$. Il est possible de calculer géométriquement la classe canonique K_X d'une telle variété algébrique (voir par exemple [Sha10, pp. 206-207]), on obtient :

$$K_X = (d - n - 1)L,$$

où L est la section hyperplane de X .

D'un point de vue topologique, L est la restriction du générateur g de $H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$ à X . De sorte que l'on pourrait directement calculer K_X en tant que classe de CHERN.

Pour cela, commençons par remarquer que la dualité de WHITNEY appliquée à

$$\tau_{\mathbf{C}P^n}|_X = \tau_X \oplus \nu_X$$

montre que :

$$c_1(\tau_{\mathbf{C}P^n})|_X = c_1(X) + c_1(\nu_X)$$

et donc en calculant $c_1(\nu_X)$ on obtient $c_1(X) = -K_X$ puisque $c_1(\tau_{\mathbf{C}P^n}) = (n+1)g$ est connu. Ainsi :

$$c_1(X) = (n+1)L - c_1(\nu_X),$$

où on a désigné par L la restriction $g|_X$.

Puisque X est une hypersurface de $\mathbf{C}P^n$, il vient que ν_X est un fibré en droite, de sorte que $c_1(\nu_X) = e(\nu_X)$. Donc on peut calculer $e(\nu_X)$ par la théorie topologique de l'intersection présentée dans ce chapitre. Si S est une section générique de ν_X , alors

$$e(\nu_X) = \text{PD}_{\mathbf{C}P^n}^{-1}([S])|_X.$$

Maintenant, une section générique de ν_X peut-être donnée par une hypersurface de même degré. On sait par la section 2 que si S est une telle hypersurface alors

$$\text{PD}^{-1}([S]) = dg$$

et donc

$$e(\nu_X) = dg|_X = dL.$$

Finalement, on obtient bien

$$c_1(X) = (n+1-d)L = -K_X.$$

C GENRE D'UNE COURBE ALGÈBRIQUE COMPLEXE

Continuons notre parallèle entre géométrie algébrique et intersection topologique. Prenons le cas d'une courbe algébrique complexe $C \subset \mathbf{C}P^2$ qui est vue comme hypersurface de degré d dans $\mathbf{C}P^2$.

La section précédente nous a montré que :

$$c_1(C) = -K_C = (3 - d)L,$$

où L est la section hyperplane de C . Cette égalité peut être obtenue ou bien géométriquement, comme présenté par exemple dans [Sha10], ou bien topologiquement comme nous l'avons vu dans la section précédente.

Puisqu'une courbe complexe est de dimension complexe 1, sa première classe de CHERN est aussi sa classe d'EULER. De sorte que l'on a :

$$\chi(C) = \langle c_1(C), [C] \rangle = -\langle K_C, [C] \rangle = (3 - d)\langle L, [C] \rangle.$$

Il s'agit donc de calculer $\langle L, [C] \rangle$. Cela peut se faire comme suit (avec g le générateur de $H^2(\mathbf{C}P^2; \mathbf{Z})$ et $i: C \rightarrow \mathbf{C}P^2$ l'inclusion) :

$$\begin{aligned} \langle L, [C] \rangle &= \langle g|_C, [C] \rangle \\ &= \langle g, i_*[C] \rangle \\ &= \langle g \cup \text{PD}^{-1}(i_*[C]), [\mathbf{C}P^2] \rangle \\ &= \langle g \cup dg, [\mathbf{C}P^2] \rangle \\ &= d. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\chi(C) = 3d - d^2.$$

Pour obtenir le genre de C , $g(C)$, il reste à relier $\chi(C)$ à cette quantité. Cela se fait par l'identité :

$$\chi(C) = 2 - 2g(C). \text{ §7}$$

Il vient alors :

$$g(C) = \frac{d^2 - 3d - 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Ce genre peut aussi être calculé par des outils de géométrie algébrique, voir [Sha10]. Cependant cette approche demande de pouvoir relier le genre à la dimension de l'espace vectoriel associé au diviseur canonique.

D DIVISEURS ET COHOMOLOGIE SINGULIÈRE

Avant d'en venir au cœur de la discussion de cette annexe, revenons un instant sur le lemme (4, p. 22) qui nous a montré qu'à une hypersurface de $\mathbf{C}P^n$ de degré d , s'associe la classe de cohomologie dg , où $g \in H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$ est le dual de POINCARÉ de la classe fondamentale de $\mathbf{C}P^n$, $[\mathbf{C}P^n] \in H_{2n}(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$. §8

On constate ainsi que si D est une classe de diviseurs, alors on peut identifier à D une classe cohomologique. Pour rappel (voir [Sha10] pour plus de détails), une telle classe de

§7. Cette identité se déduit du fait que C est simplement connexe, qualité qui est prouvée avec la théorie de LEFSCHETZ.

§8. Réciproquement, si on considère une classe de cohomologie $kg \in H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$, alors on peut représenter kg par n'importe quelle hypersurface de degré k de $\mathbf{C}P^n$. De sorte que la conjecture de HODGE, dans ce cas très élémentaire, est vraie.

diviseurs de $\mathbf{C}P^n$ est de la forme nL où L est la section hyperplane de $\mathbf{C}P^n$, c'est-à-dire topologiquement une copie de $\mathbf{C}P^{n-1}$ dont le dual de POINCARÉ est bien g .

Plus généralement, nous allons discuter le fait que si M est une variété complexe lisse irréductible, alors il y a un isomorphisme entre les classes de diviseurs de M , les fibrés en droite (complexe) de base M et un sous-groupe du second groupe de cohomologie de M à coefficients entiers.

Pour répondre à cette question, le point crucial sera de donner une nouvelle description formelle d'un fibré en droite complexe. Nous aurons besoin pour cela du langage des faisceaux et de la cohomologie de ČECH dont nous ne rappellerons pas les définitions et premières propriétés (voir [Spa66]), bien que l'on donnera souvent une façon géométrique de comprendre ces arguments. La principale référence de cette annexe est [GH78].

Les hypothèses pour ce qui suit sont les suivantes. On désigne par M une variété complexe compacte (lisse et irréductible). Aussi, on désigne par $\{U_i\}$ un recouvrement de M par des ouverts contractiles.

Si $E \rightarrow M$ est un fibré en droite (complexe), alors puisque E est trivial sur chacun des ouverts U_i , la description de ce fibré se réduit à la description des fonctions de transition (lisses) :

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbf{C}).$$

Dont le rôle consiste à faire le changement de trivialisations sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$. Remarquons au passage qu'après le choix d'un produit hermitien, on peut supposer que les $g_{\alpha\beta}$ sont à valeurs dans $U_1(\mathbf{C}) \simeq S^1$.

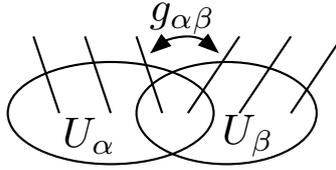


FIGURE 2.7 – Cocycle d'un fibré vectoriel.

La donnée des fonctions de transition d'un fibré vectoriel $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$ s'appelle un *cocycle*. Réciproquement, la donnée de fonctions lisses $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbf{C}^*$ correspond à un cocycle si, et seulement si, :

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1.$$

Ces cocycles sont les éléments d'un groupe de cohomologie de ČECH : $H^1(M; \mathcal{C}^\infty(S^1))$.

Si l'on cherche à retrouver le fibré en droite correspondant à un cocycle $\{g_{\alpha\beta}\}$, il suffit d'étudier le quotient :

$$M \times \mathbf{C} / [U_\alpha \times \mathbf{C} \ni (z, v) \sim (z, g_{\alpha\beta}v) \in U_\beta \times \mathbf{C}].$$

Aussi, $H^1(M; \mathcal{C}^\infty(S^1))$ est un groupe pour l'opération :

$$(g_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}) \mapsto g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$$

qui définit bien encore un cocycle.

Dans ce langage, la première classe de CHERN est l'isomorphisme :

$$c_1 : H^1(M; \mathcal{C}^\infty(S^1)) \rightarrow H^2(M; \mathbf{Z}).$$

Remarquons au passage, sans plus de précision, que cet isomorphisme aurait pu être trouvé par la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{\exp(2i\pi\cdot)} S^1 \longrightarrow 0$$

qui induit en cohomologie de ČECH :

$$\dots \longrightarrow H^1(M; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})) \longrightarrow H^1(M; \mathcal{C}^\infty(S^1)) \xrightarrow{c_1} H^1(M; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{Z})) \longrightarrow H^2(M; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})) \longrightarrow \dots$$

Les groupes $H^k(M; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}))$ sont nuls du fait de l'existence de partitions de l'unité et comme $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, le groupe $H^1(M; \mathcal{C}^\infty(\mathbf{Z}))$ est isomorphe au groupe de cohomologie singulière $H^1(M; \mathbf{Z})$.

On peut affiner la définition d'un fibré en droite complexe en demandant de plus à ce que les fonctions de transition soient holomorphes. On désigne par $\mathcal{O}(M)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur M (à valeurs dans \mathbf{C}), et par $\mathcal{O}^*(M)$ le sous-faisceau des fonctions holomorphes à valeurs dans \mathbf{C}^* . De sorte que le cocycle $\{g_{\alpha\beta}\}$ appartient maintenant au groupe de cohomologie de ČECH $H^1(M; \mathcal{O}^*(M))$.

On appelle *groupe de PICARD*, désigné par $\text{Pic}(M)$, le groupe de cohomologie de ČECH $H^1(M; \mathcal{O}^*(M))$. C'est donc le groupe des fibrés en droite complexe holomorphes sur M .

Désignons aussi par $\mathcal{M}(M)^*$ le faisceau des fonctions méromorphes non identiquement nulles sur M .

Une fois de plus, nous avons la première classe de CHERN qui réalise un morphisme :

$$c_1 : H^1(M; \mathcal{O}^*(M)) \rightarrow H^2(M; \mathbf{Z})$$

qui est injectif car $\mathcal{O}^*(M) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ mais n'est généralement pas surjectif.

Il va s'agir maintenant de relier la notion de diviseur à celle de fibré en droite. Commençons par écrire dans le langage des faisceaux la notion de diviseur. Un diviseur, D , sur M , c'est la donnée d'une somme finie :

$$D = \sum n_i V_i,$$

où les n_i sont des entiers relatifs et les V_i sont des hypersurfaces analytiques de M . Le fait que V soit une hypersurface analytique de M implique (par un résultat d'analyse) que V est localement autour de n'importe quel point $p \in V$ donnée par les zéros de f , une fonction holomorphe dans ce même voisinage.

Ainsi, sur chaque ouvert contractile U_α , il existe des $g_{i\alpha}$ holomorphes de sorte que $V_i \cap U_\alpha$ est décrite par les zéros de $g_{i\alpha}$ et donc D est donnée en U_α par l'équation de

$$f_\alpha = \prod g_{i\alpha}^{n_i} \in \mathcal{M}^*(U_\alpha).$$

La donnée globale de D correspond à celle d'une section globale du faisceau quotient $\mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M)$.^{§9} Ainsi, on a l'identification en cohomologie de ČECH :

$$\text{Div}(M) = H^0(M; \mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M)).$$

Maintenant, construisons un fibré en droite à partir d'un diviseur D . Il s'agit de décrire un homomorphisme :

$$[\cdot] : \text{Div}(M) \rightarrow \text{Pic}(M).$$

§9. L'équation locale de V autour de U_α ne varie certainement pas par multiplication d'une fonction holomorphe sans zéro.

Si sur U_α et U_β le diviseur D est décrit par les équations $f_\alpha \in \mathcal{M}^*(U_\alpha)$ et $f_\beta \in \mathcal{M}^*(U_\beta)$, alors

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$$

est holomorphe et jamais nulle, c'est donc un élément de $\mathcal{O}^*(M)$. Les fonctions $\{g_{\alpha\beta}\}$ définissent de plus un cocycle :

$$g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \frac{f_\beta}{f_\gamma} \frac{f_\gamma}{f_\alpha} = 1.$$

Cela définit donc bien un élément de $\text{Pic}(M)$. On désigne par $[D]$ ce fibré, on l'appelle *fibré en droite associé au diviseur D* .

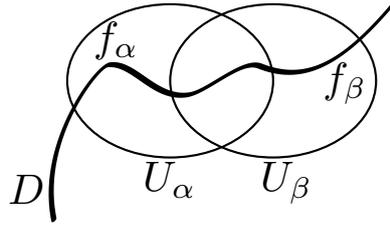


FIGURE 2.8 – Fibré en droite associé à un diviseur.

Remarquons maintenant que si D est donné comme étant le diviseur d'une fonction méromorphe f , alors on peut prendre $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ et on a évidemment $g_{\alpha\beta} = 1$ pour tous α, β . Ainsi, les diviseurs principaux (c'est-à-dire ceux donnés par une fonction méromorphe) sont d'image nulle dans $\text{Pic}(M)$.

Réciproquement, si $[D]$ est trivial, alors cela signifie qu'il existe des fonctions holomorphes jamais nulles $h_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ vérifiant

$$\frac{f_\alpha}{f_\beta} = g_{\alpha\beta} = \frac{h_\alpha}{h_\beta}.$$

Mais alors

$$f = \frac{f_\alpha}{h_\alpha} = \frac{f_\beta}{h_\beta}$$

est une fonction méromorphe et elle définit D .

Finalement, avec $\text{Cl}(M)$ le groupe des classes de diviseurs de M (c'est le quotient du groupe des diviseurs par son sous-groupe des diviseurs principaux) :

$$[\cdot] : \text{Cl}(M) \rightarrow \text{Pic}(M)$$

est un isomorphisme de groupes. §10

Dans le langage des faisceaux et de la cohomologie de ČECH, c'était simplement le fait que la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*(M) \longrightarrow \mathcal{M}^*(M) \longrightarrow \mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M) \longrightarrow 0$$

induit en cohomologie la suite exacte :

$$H^0(M; \mathcal{M}^*(M)) \longrightarrow H^0(M; \mathcal{M}^*(M)/\mathcal{O}^*(M)) \longrightarrow H^1(M; \mathcal{O}^*(M)).$$

§10. On peut vérifier sans peine que la loi de groupe commute avec $[\cdot]$ et qu'une relation linéaire induit un isomorphisme de fibrés en droites.

Pour terminer ce tableau, il nous faut maintenant relier la classe de CHERN du fibré associé à un diviseur prescrit. Normalement, cela nous donnera un morphisme injectif :

$$\mathrm{Cl}(M) \rightarrow H^2(M; \mathbf{Z}).$$

Pour que cela fonctionne, il nous faut montrer que la section générique d'un fibré associé à un diviseur correspond à ce même diviseur. Pour que cela se fasse sans encombre, il nous faut une notion de section permettant d'obtenir des indices négatifs. En temps normal, cela est possible avec des sections lisses, mais nous utilisons ici la structure complexe de M . Nous allons donc devoir préciser une nouvelle notion de section : ce seront les sections méromorphes.

Remarquons tout de suite, que si $1/z$ a bien un pôle en 0, son indice est lui le même que si on considérait \bar{z} (qui n'est pas holomorphe). De sorte que la notion d'indice pour une section méromorphe et une section lisse est la même une fois cette transformation effectuée (ce qui est possible puisque $1/z$ et \bar{z} coïncident sur le cercle unité et que cette transformation est locale et peut se généraliser à plusieurs variables).

Si $L \rightarrow M$ est un fibré en droite complexe avec les fonctions de transitions $\{g_{\alpha\beta}\}$, alors une section holomorphe s c'est la donnée d'un élément du faisceau $\mathcal{O}(M)$, de sorte que sur l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$:

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta.$$

De même, une section méromorphe est un élément du faisceau $\mathcal{M}(M)$ vérifiant cette même règle. Si V est une hypersurface analytique de M , alors on peut définir l'ordre de s le long de V par :

$$\mathrm{ord}_V(s) = \mathrm{ord}_V(s_\alpha)$$

pour tout α tel que $V \cap U_\alpha \neq \emptyset$. On peut alors considérer le diviseur :

$$(s) = \sum_V \mathrm{ord}_V(s) V.$$

Si l'on suppose à présent que $L = [D]$, alors si s est une section méromorphe :

$$\frac{s_\alpha}{s_\beta} = g_{\alpha\beta}$$

et donc, par isomorphisme entre $\mathrm{Cl}(M)$ et $\mathrm{Pic}(M)$, $(s) = D$.

En conclusion, le diviseur D induit un fibré en droite $L = [D]$ dont une section méromorphe induit le diviseur D . Mais comme ce diviseur correspond aux zéros et pôles de cette section, après modification des pôles, on obtient que le diviseur n'est jamais que le dual de la première classe de CHERN du fibré en droite.

Finalement, on a une association $D \mapsto [D] \mapsto c_1([D])$ qui est un isomorphisme puis une injection. On a donc bien :

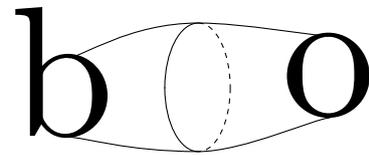
$$\mathrm{Cl}(M) \simeq \mathrm{Pic}(M) \subset H^2(M; \mathbf{Z})$$

comme annoncé.

On pourrait aller plus loin, et montrer après un détour par la théorie de HODGE qu'en fait l'image par c_1 de $\mathrm{Pic}(M)$ est exactement $H^{1,1}(M; \mathbf{C})$. C'est le contenu du théorème des classes $(1, 1)$ de LEFSCHETZ (voir [GH78]). Il semble que ce soit le seul cas de la conjecture de HODGE prouvé jusqu'à présent.

Chapitre 3

Cobordisme



Considérons une variété fermée M . Existe-t-il une variété compacte N telle que M soit le bord de N ? Si c'est le cas, nous dirons que M est bordante. Et cette question, c'est celle du *bordisme*.

Une question proche est la suivante. Considérons cette fois-ci deux variétés fermées de même dimension M_1 et M_2 . En posant $M = M_1 + M_2$ la somme disjointe de ces deux variétés, nous obtenons une nouvelle variété fermée. Est-ce que M est bordante ? Si oui, nous dirons que M_1 et M_2 sont *cobordantes*. Cette dernière question est celle du *cobordisme*. Elle est très féconde et les résultats que nous présenterons dans ce chapitre sont devenus des incontournables de la topologie algébrique.

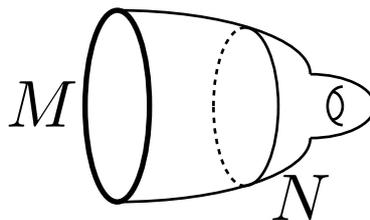


FIGURE 3.1 – Bordisme.

Nous pouvons déjà formuler plusieurs remarques sur la méthodologie à employer. Tout d'abord, il est clair qu'il est très difficile de discuter de l'unicité de N . En effet, dans la figure ci-dessus il est aisé de voir que l'on peut retirer l'anse de N , de sorte qu'une nouvelle variété N' soit également de bord égal à M alors que N et N' ne sont pas homéomorphes (ni même homotopiquement équivalentes).

Une seconde remarque est sur celle du formalisme. Cette question du bordisme est en fait beaucoup moins étrangère que l'on ne pourrait le penser. En effet, le principe même de l'homologie singulière est d'interroger le bordisme de certains cycles. Ce sont les cycles qui ne sont pas des bords qui définissent les classes d'homologie non nulles. Dans notre cadre actuel, les cycles sont remplacés par les variétés fermées, et les classes d'homologie non nulles vont être remplacées par des éléments d'un anneau : l'anneau de cobordisme.

Cet anneau de cobordisme, que nous noterons Ω , nous pouvons déjà le décrire. Commençons par fixer la relation d'équivalence suivante. Deux variétés fermées M_1 et M_2 sont équivalentes si elles sont cobordantes. Décrivons maintenant deux lois internes.

La somme disjointe fournit une première loi de composition interne. Si M_1 et M_2 sont de même dimension, alors $M_1 + M_2$ est encore de la dimension de M_1 et M_2 et la classe de cobordisme est compatible : si N_1 borde M_1 et N_2 borde M_2 alors $N_1 + N_2$ borde $M_1 + M_2$.

On peut également donner des éléments neutres pour cette opération. Ils sont par

exemple donnés par les sphères S^n , pour $n \geq 0$. On remarquera que pour chaque dimension il existe un élément neutre.

Aussi, pour n'importe quelle variété M , la somme $M + M$ est bordante puisque la variété $N := [0, 1] \times M$ donne une équivalence entre M et M . Cela nous montre que n'importe quelle variété fermée est d'ordre deux.

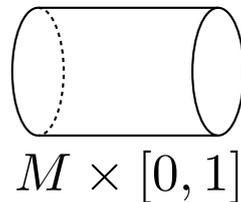


FIGURE 3.2 – Les classes non triviales sont d'ordre deux.

Mais existe-t-il au moins une variété n'étant pas de classe de cobordisme nulle ? La réponse est positive. Les espaces projectifs $\mathbf{R}P^n$ pour n pair fournissent des exemples de variétés fermées n'étant pas des bords. Pour justifier cette affirmation on pourra utiliser le lemme de PONTYAGIN (1, p. 37) qui sera démontré dans ce chapitre.

Pour obtenir un anneau, il nous reste à définir un produit pour les classes de cobordisme. Ce produit sera incarné par le produit cartésien. Si M_1 et M_2 sont deux variétés fermées alors $M_1 \times M_2$ est encore une variété fermée. Il n'est pas difficile de voir que si N_1 borde M_1 et N_2 borde M_2 alors $N_1 \times N_2$ borde $M_1 \times M_2$. De sorte que cette opération est bien compatible avec la relation de cobordisme.

Aussi, puisque si M_1 est de dimension m_1 et M_2 de dimension m_2 , alors comme $M_1 \times M_2$ est de dimension $m_1 m_2$, on obtient une structure d'anneau gradué sur Ω . De sorte que l'on peut s'intéresser aux classes cobordisme selon leur degré, c'est-à-dire leur dimension topologique.

Terminons cette introduction par un raffinement de la question du cobordisme. Nous allons maintenant supposer les variétés orientables, de sorte que nous pouvons examiner les orientations induites par le passage au bord.

Pour rappel, si N est une variété à bord orientée alors ∂N possède une orientation canonique, de sorte que si M est fermée et orientée, alors $M \times [0, 1]$ a pour bord $M + (-M)$ où $-M$ est la variété M munie de son orientation opposée.

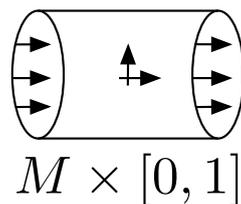


FIGURE 3.3 – Cobordisme orienté.

La notation $-M$ pour indiquer que M est munie de l'orientation opposée n'est alors pas hasardeuse puisque $M + (-M)$ est équivalente à la classe nulle.

Ce qui paraît comme un raffinement de la question du (co-)bordisme a eu deux effets majeurs. Le premier est que nous avons restreint les variétés admissibles en considérant les variétés orientées. Le deuxième effet est que M n'est plus nécessairement d'ordre deux.

Ce nouvel anneau de cobordisme (dont l'addition et le produit sont définis de la même façon), nous le désignerons par Ω_* . Ce chapitre s'intéressera plus particulièrement à la structure de Ω_* modulo les classes de torsion. Nous montrerons notamment que les générateurs de $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ sont les projectifs complexes $\mathbf{C}P^{2k}$, pour k entier.

1 RÉSULTATS DE THOM ET PONTRYAGIN

Dans cette première section, nous allons aborder les relations entre classes caractéristiques du fibré tangent d'une variété M et sa classe de cobordisme (orienté ou non).

Considérons M^n une variété fermée lisse. Sa classe totale de STIEFEL-WHITNEY :

$$w(M) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n,$$

peut-être utilisée de sorte à obtenir des nombres, qui seront des invariants topologiques puisque c'est le cas de ces classes (voir (5, p. 9)).

Si $[M]$ désigne la classe fondamentale de M , c'est-à-dire le générateur de $H^n(M; \mathbf{Z}_2)$, alors les *nombres de STIEFEL-WHITNEY* sont les quantités :

$$\langle w_1^{n_1} w_2^{n_2} \cdots w_n^{n_n}, [M] \rangle,$$

où l'on a $1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \cdots + n \cdot n_n = n$. Par exemple :

$$\chi(M) = \langle w_n, [M] \rangle \pmod{2}.$$

LEMME 1 (PONTRYAGIN)

Si M est le bord d'une variété compacte, alors ses nombres de STIEFEL-WHITNEY sont nuls.

PREUVE

Supposons que $M = \partial N$. On rappelle tout d'abord que l'opérateur de bord en homologie, ∂ , est aussi celui provenant de la suite exacte de la paire (N, M) ,

$$\partial: H_{n+1}(N, M; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_n(M; \mathbf{Z}_2),$$

et il envoie la classe fondamentale de N , $[N]$, sur celle de M , $[M]$.

D'une part, puisque M est plongée dans la variété N , il vient que $\tau_N|_M = \tau_M \oplus \varepsilon$ (avec ε le fibré trivial de rang 1). Donc les classes caractéristiques de M sont l'image des classes de N par le morphisme induit par la restriction :

$$j^*: H^\bullet(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^\bullet(M; \mathbf{Z}_2).$$

D'autre part, la suite exacte de la paire (N, M) montre que la composition :

$$H^n(N; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{j^*} H^n(M; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(N, M; \mathbf{Z}_2)$$

envoie les produits $w_1^{n_1} \cdots w_n^{n_n}$ sur 0 par δ .

Mais puisque :

$$\langle w_1^{n_1} w_2^{n_2} \cdots w_n^{n_n}, [M] \rangle = \langle w_1^{n_1} w_2^{n_2} \cdots w_n^{n_n}, \partial[N] \rangle = \langle \delta(w_1^{n_1} w_2^{n_2} \cdots w_n^{n_n}), [N] \rangle$$

le membre de droite est nul et donc les nombres de STIEFEL-WHITNEY de M le sont aussi. ■

Nous avons montré un résultat en dimension trois : toute variété fermée orientable de dimension 3 est parallélisable (B, p. 15). En particulier, tous les nombres de STIEFEL-WHITNEY d'une telle variété sont nuls.

On peut alors s'interroger sur la réciproque : si les nombres de STIEFEL-WHITNEY sont nuls, est-ce que la variété est un bord ? Si elle est vraie, cela montre que toutes les variétés fermées orientées de dimension 3 sont des bords.

La réciproque générale est vraie, c'est un résultat difficile et fameux de THOM.

THÉORÈME 2 (THOM dans [Tho54])

Si les nombres de STIEFEL-WHITNEY de M sont nuls, alors M est le bord d'une variété compacte.

Jusqu'à présent nous avons oublié toute notion d'orientation, il est temps de s'intéresser à ces résultats dans le cas du cobordisme orienté.

Supposons à présent que M est une variété fermée orientée. Comme M est orientée, elle possède une classe totale de PONTRYAGIN :

$$p(M) = 1 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor}.$$

Pour rappel, on obtient les classes de PONTRYAGIN de M à partir des classes de CHERN du fibré $\tau_M \otimes \mathbf{C}$ et du fibré $\overline{\tau_M} \otimes \mathbf{C}$.

Si ξ est un fibré vectoriel réel de base M et de rang k , alors la complexification (obtenue fibre à fibre) $\xi \otimes \mathbf{C}$ donne un fibré complexe de rang k . Puisque ξ est réel, il y a un isomorphisme entre $\xi \otimes \mathbf{C}$ et $\overline{\xi} \otimes \mathbf{C}$.

Maintenant, les classes de CHERN de ces deux fibrés isomorphes sont :

$$\begin{aligned} c(\xi \otimes \mathbf{C}) &= 1 + c_1(\xi \otimes \mathbf{C}) + c_2(\xi \otimes \mathbf{C}) + \cdots + c_k(\xi \otimes \mathbf{C}) \\ c(\overline{\xi} \otimes \mathbf{C}) &= 1 - c_1(\xi \otimes \mathbf{C}) + c_2(\xi \otimes \mathbf{C}) \mp \cdots + (-1)^k c_k(\xi \otimes \mathbf{C}) \end{aligned}$$

et on constate en particulier que toutes les classes de degrés impairs, $c_{2k+1}(\xi \otimes \mathbf{C})$, sont de 2-torsion (comme cycles de M).

Les classes de PONTRYAGIN sont alors les

$$p_i(\xi) := (-1)^i c_{2i}(\xi \otimes \mathbf{C}).$$

Une série de calculs (voir [MS74]) montre que

$$2p(\xi \oplus \eta) = 2p(\xi)p(\eta)$$

et que si ω est un fibré *complexe* de rang (complexe) k alors les classes de PONTRYAGIN du réélifié, $\omega_{\mathbf{R}}$, sont déterminées par les classes de CHERN de ω :

$$1 - p_1 + p_2 \mp \cdots + (-1)^k p_k = (1 - c_1 + c_2 \mp \cdots + (-1)^k c_k)(1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_k).$$

En particulier, on retiendra que si τ_M est le fibré tangent d'une variété complexe de dimension (complexe) deux, alors

$$p_1(\tau_M) = c_1^2(\tau_M) - 2c_2(\tau_M).$$

On peut, de même que dans le cas des classes de STIEFEL-WHITNEY, considérer les *nombres de PONTRYAGIN* de M comme étant les quantités :

$$\langle p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_{n/4}^{n_{n/4}}, [M] \rangle,$$

où cette fois-ci $[M]$ est la classe fondamentale de M en tant que variété orientée, c'est-à-dire le générateur préféré de $H_n(M; \mathbf{Z})$, et où

$$4 \cdot n_1 + 2 \cdot 4 \cdot n_2 + \cdots + \lfloor n/4 \rfloor \cdot 4 \cdot n_{n/4} = n.$$

En répétant à l'identique la preuve du lemme de PONTRYAGIN, on obtient :

LEMME 3 (PONTYAGIN)

Si M est le bord orienté d'une variété compacte orientée alors les nombres de PONTYAGIN de M sont nuls.

Et la réciproque de ce lemme pour le cobordisme orienté est le théorème suivant (conjecturé par THOM).

THÉORÈME 4 (WALL dans [Wal60])

Si les nombres de STIEFEL-WHITNEY et de PONTYAGIN de M sont simultanément nuls alors M est le bord orienté d'une variété compacte.

Examinons le cas particulier des espaces projectifs complexe $\mathbf{C}P^k$. Un calcul classique (voir [MS74, p. 177]) montre que

$$p(\mathbf{C}P^k) = (1 + g^2)^{k+1},$$

où $g \in H^2(\mathbf{C}P^k; \mathbf{Z})$ est le générateur usuel de l'anneau cohomologie de $\mathbf{C}P^k$ à coefficients dans \mathbf{Z} .

En particulier, si $k = 2r$, alors

$$p_r(\mathbf{C}P^{2r}) = \binom{2r+1}{r} g^{2r}$$

est non nul et est de degré $2k = 4r$. Ainsi,

$$\langle p_r(\mathbf{C}P^{2r}), [\mathbf{C}P^{2r}] \rangle = \binom{2r+1}{r} \neq 0$$

et donc les projectifs $\mathbf{C}P^{2r}$ sont non triviaux dans l'anneau Ω_* . L'égalité précédente montre aussi que ces projectifs ne sont pas des classes de torsion. On en déduit :

LEMME 5

Si $n = 4r$, alors $\Omega_n \otimes \mathbf{Q}$ admet au moins $p(r)$ classes non nulles, avec $p(r)$ le nombre de partitions de r .

PREUVE

Chaque $\mathbf{C}P^{2r}$ pour $r \leq k$ est de classe de cobordisme non nulle. Les produits $\mathbf{C}P^{2r_1} \times \mathbf{C}P^{2r_2} \times \dots \times \mathbf{C}P^{2r_n}$ avec $r_1 + \dots + r_n = r$ donnent des classes de cobordisme non nulles dans $\Omega_n \otimes \mathbf{Q}$. ■

Enfin, examinons le cas où la dimension de M n'est pas divisible par 4.

LEMME 6

Si M^n est une variété fermée orientée dont la dimension n'est pas divisible par 4, alors M^n est de 2-torsion dans Ω_n .

PREUVE

Il suffit de remarquer que M^n a nécessairement tous ses nombres de PONTYAGIN nuls et que ses nombres de STIEFEL-WHITNEY sont de 2-torsion. ■

2 ESPACE ET THÉORIE DE THOM

Le but de cette section va être de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1 (THOM)

Le groupe de cobordisme orienté Ω_n est fini pour $n \neq 0 \pmod{4}$ et est de type fini de rang égal à $p(r)$, le nombre de partitions de r , lorsque $n = 4r$.

En particulier, $\Omega_n \otimes \mathbf{Q}$ est nul si n n'est pas un multiple de quatre, et est libre et de rang égal à $p(r)$ sinon.

Il est absolument fondamental au théorème de la signature tel que démontré par HIRZEBRUCH.

Pour ce faire, nous allons introduire l'espace de THOM et utiliser des résultats de la thèse de SERRE. L'exposé suit la progression telle que proposée dans [MS74].

2.1 Espace de THOM d'un fibré euclidien

Soit $\xi = (E, B, \pi)$ un fibré vectoriel de rang k . On suppose que ξ est muni d'une métrique euclidienne.

DÉFINITION 2

Soit $A \subset E$ l'ensemble des vecteurs v de norme au plus 1. Alors le quotient

$$T := E/A$$

est appelé *espace de THOM*

On constate que T a un point spécial, c'est l'image de A par la projection sur le quotient, on le désigne par t_0 . Le complémentaire $T \setminus \{t_0\}$ est l'ensemble des vecteurs $v \in E$ avec $|v| < 1$.

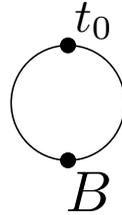


FIGURE 3.4 – Espace de THOM.

Remarquons que si B est compact alors T peut être identifié à la compactification d'ALEXANDROFF de E . La correspondance $E - A \rightarrow E$ pouvant être donnée par le difféomorphisme $v \mapsto v/\sqrt{1 - |v|^2}$.

LEMME 3

Si l'espace de base, B , est un CW-complexe alors T est un CW-complexe $(k - 1)$ -connexe, ayant en plus du point de base t_0 , une $(n + k)$ -cellule correspondant à chaque n -cellule de B .

En particulier, si B est un complexe fini, alors T aussi.

PREUVE

Avec $\pi: E \rightarrow B$ la projection, si e_α est une n -cellule de B alors

$$\pi^{-1}(e_\alpha) \cap (E - A)$$

est une cellule ouverte de dimension $n+k$. Ces cellules ouvertes sont disjointes et couvrent $E - A \simeq T - t_0$. Aussi, il n'y a aucune cellule de dimension $1 \leq d \leq k - 1$.

Soit $f: D^n \rightarrow B$ une application caractéristique pour e_α . Alors le fibré vectoriel euclidien induit, $f^*(\xi)$, est trivial puisque D^n est contractile. Donc les vecteurs de longueur au plus 1 dans $E(f^*\xi)$ forment un produit topologique $D^n \times D^k$.

La composition

$$D^n \times D^k \subset E(f^*\xi) \rightarrow E(\xi) \rightarrow T(\xi)$$

donne l'application caractéristique pour l'image de $\pi^{-1}(e_\alpha)$ dans T . ■

2.2 Groupes d'homotopie de T

La suite nécessitera des résultats sur les groupes d'homotopie de T . Commençons par sa description homologique.

LEMME 4

On a un isomorphisme canonique

$$H_{k+i}(T, t_0) \simeq H_i(B).$$

PREUVE

Tout d'abord, B est plongé comme la section nulle dans $E - A \simeq T - t_0$.

Soit $T_0 := E_0/A$ le complémentaire de la section nulle dans l'espace de THOM T . Alors T_0 est contractile et donc par la suite exacte du triplet (T, T_0, t_0) ,

$$\dots \longrightarrow H_n(T_0, t_0) \longrightarrow H_n(T, t_0) \longrightarrow H_n(T, T_0) \longrightarrow H_{n-1}(T_0, t_0) \longrightarrow \dots$$

il s'ensuit

$$H_n(T, t_0) \simeq H_n(T, T_0).$$

Par excision, on en déduit

$$H_n(T, t_0) \simeq H_n(E, E_0)$$

et avec l'isomorphisme de THOM

$$H_n(E, E_0) \simeq H_{n-k}(B)$$

on conclut. ■

À présent, nous allons donner des résultats de la thèse de SERRE. On pourra consulter [Spa66] pour plus de détails sur le sujet.

On désigne par \mathcal{C} la classe de tous les groupes abéliens finis. On dit qu'un homomorphisme $h: A \rightarrow B$ entre groupes abéliens est un \mathcal{C} -isomorphisme si le noyau, $h^{-1}(0)$, et le co-noyau, $B/h(A)$, appartiennent à \mathcal{C} .

THÉORÈME 5

Soit X un complexe fini $(k-1)$ -connexe, avec $k \geq 2$. alors l'homomorphisme de HUREWICZ

$$\pi_r(X) \rightarrow H_r(X; \mathbf{Z})$$

est un \mathcal{C} -isomorphisme pour $r < 2k - 1$.

COROLLAIRE 6

Si T est l'espace de THOM d'un k -fibré vectoriel au-dessus d'un complexe fini B , alors il y a un \mathcal{C} -isomorphisme

$$\pi_{n+k}(T) \rightarrow H_n(B; \mathbf{Z})$$

pour tout $n < k - 1$.

2.3 Transversalité

On énonce dans ce paragraphe un théorème de transversalité. Puisqu'il est très proche du théorème de transversalité de THOM dans sa version classique, on ne donnera pas démonstration. Cependant les détails peuvent être trouvés dans [MS74].

On constate tout d'abord que l'espace de base, B , de ξ est lissement plongé dans E par la section nulle. On aimerait donc dire que B est lissement plongé dans l'espace de THOM T . Cependant T n'est pas nécessairement une variété, donc la régularité lisse exprime en

fait la régularité sur $T - t_0$ qui est bien une variété. Comme la section nulle n'intersecte pas t_0 , cela ne pose donc pas de difficulté et on dit que B est lissement plongé dans T .

Étant donnée une application continue, $f: S^m \rightarrow T$, on aimerait approcher f par une application lisse (sous ce même sens). Il n'est pas difficile d'approcher f par une application homotope f_0 qui coïncide avec f sur $f^{-1}(t_0)$ et est lisse sur le complémentaire.

THÉORÈME 7

Toute application continue $f: S^m \rightarrow T(\xi)$ est homotope à une application g lisse sur $g^{-1}(T - t_0)$ et transverse à la section nulle B .

La classe de cobordisme orienté de la variété lisse de dimension $(m - k)$, $g^{-1}(B)$, ne dépend que de la classe d'homotopie de g .

Ainsi, la correspondance

$$g \mapsto g^{-1}(B)$$

fournit un homomorphisme de groupes

$$\pi_m(T, t_0) \rightarrow \Omega_{m-k}.$$

2.4 Théorème sur le cobordisme de THOM

On conclut cette section par la preuve du théorème de THOM, à l'aide des outils introduits.

On désigne par

$$\tilde{\gamma}_p^k := \tilde{\gamma}^k(\mathbf{R}^{k+p})$$

le fibré des k -plans orientés dans \mathbf{R}^{k+p} .

LEMME 8

Si $k \geq n$ et $p \geq n$ alors l'homomorphisme

$$\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}_p^k)) \rightarrow \Omega_n$$

est surjectif.

PREUVE

Soit M^n une variété lisse compacte et orientée. Plongeons M dans \mathbf{R}^{n+k} et choisissons un voisinage tubulaire U de M dans \mathbf{R}^{n+k} , difféomorphe à $E(\nu^k)$, l'espace total du fibré normal de M .

L'application de GAUSS fournit une application

$$U \simeq E(\nu^k) \rightarrow E(\tilde{\gamma}_n^k) \subset E(\tilde{\gamma}_p^k),$$

en composant celle-ci avec la projection $E(\tilde{\gamma}_p^k) \rightarrow T(\tilde{\gamma}_p^k)$, on obtient une application

$$g: U \rightarrow T(\tilde{\gamma}_p^k)$$

qui est transverse à la section nulle B , et satisfait $g^{-1}(B) = M^n$.

On étend g à la compactification $\mathbf{R}^{n+k} \cup \{\infty\} \simeq S^{n+k}$ en envoyant $S^{n+k} - U$ sur le point de base t_0 . L'application résultante

$$\tilde{g}: S^{n+k} \rightarrow T(\tilde{\gamma}_p^k)$$

donne la classe de cobordisme de M^n . ■

On peut maintenant démontrer le théorème :

THÉORÈME 9 (THOM)

Le groupe de cobordisme orienté Ω_n est fini pour $n \neq 0 \pmod{4}$ et est de type fini de rang égal à $p(r)$, le nombre de partitions de r , lorsque $n = 4r$.

PREUVE

Par le lemme précédent, Ω_n est l'image de l'homomorphisme

$$\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}_p^k)) \rightarrow \Omega_n$$

pour k et p grands. Mais par le théorème sur les groupes d'homotopie modulo \mathcal{C} , le groupe d'homotopie

$$\pi_{n+k}(T(\tilde{\gamma}_p^k))$$

est \mathcal{C} -isomorphe à

$$H_n(\tilde{G}_k(\mathbf{R}^{k+p}); \mathbf{Z}).$$

Le calcul de la cohomologie de \tilde{G}_k montre que ce groupe est fini pour $n \neq 0 \pmod{4}$ et est de type fini de rang $p(r)$ pour $n = 4r$ (voir [MS74] pour ce calcul classique). Comme le rang de Ω_{4r} (voir (5, p. 39)) est au moins $p(r)$, cela conclut. ■

COROLLAIRE 10

Le produit tensoriel $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes au-dessus de \mathbf{Q} ayant pour générateurs indépendants

$$\mathbf{C}P^2, \mathbf{C}P^4, \mathbf{C}P^6, \dots$$

COROLLAIRE 11

Soit M^n une variété lisse compacte et orientée. Alors une somme $M^n + \dots + M^n$ est un bord orienté si, et seulement si, tous les nombres de PONTYAGIN $p_I[M^n]$ sont nuls.

PREUVE

Sinon, il y aurait trop de générateurs linéairement indépendants de Ω_n . ■

Chapitre 4

Théorème de la signature

Annoncé (il semblerait pour la première fois) par HIRZEBRUCH dans [Hir53], le théorème de la signature est un résultat incontournable de topologie algébrique des variétés. Fondé sur les résultats de cobordisme essentiellement dus à THOM, le théorème de la signature de HIRZEBRUCH donne un lien profond entre la forme d'intersection d'une variété, dont la dimension doit être divisible par quatre, et ses nombres de PONTRYAGIN.

Plus explicitement, après avoir introduit un objet algébrique (les séries multiplicatives), on va montrer que certaines combinaisons de nombres de PONTRYAGIN, appelés K -polynômes, donnent lieu à des invariants de cobordisme, appelés K -genres. La signature d'une variété de dimension divisible par quatre en sera un cas particulier et c'est ce qui donnera lieu au théorème de HIRZEBRUCH.

La littérature pour ce chapitre se compose essentiellement de [MS74] et de [Hir66] (le premier prenant pour référence le second).

Notations

Par la suite, Λ désignera toujours un anneau commutatif unitaire. On désignera aussi par

$$A^* = (A^0, A^1, A^2, \dots)$$

une Λ -algèbre graduée dont le produit est commutatif indépendamment du degré des termes. Par exemple les groupes de cohomologie de dimensions $4k$ forment une telle Λ -algèbre graduée pour le cup-produit.

À A^* on associera l'anneau commutatif A^Π des sommes inversibles $1 + a_1 + a_2 + \dots$ avec $a_i \in A^i$.

1 SÉRIES MULTIPLICATIVES

Dans cette première section, on va s'intéresser aux propriétés algébriques des séries multiplicatives. Ce sera l'ingrédient algébrique clef pour démontrer le théorème de HIRZEBRUCH.

On considère une suite de polynômes

$$K(x) = (K_1(x_1), K_2(x_1, x_2), K_3(x_1, x_2, x_3), \dots)$$

à coefficients dans Λ de sorte que si x_i est de degré i , alors $K_n(x_1, \dots, x_n)$ est homogène de degré n . Étant donné une telle suite K et un élément a de A^Π on obtient un nouvel élément, $K(a)$, de A^Π donné par :

$$K(a) = 1 + K_1(a_1) + K_2(a_1, a_2) + \dots$$

On dit que K est une *suite multiplicative de polynômes* si, de plus, l'identité

$$K(ab) = K(a)K(b)$$

est vraie pour tous $a, b \in A^{\text{II}}$.

Le but sera de classer ces suites multiplicatives.

La première remarque à formuler est la suivante. Supposons que A^* soit l'anneau de polynômes $\Lambda[t]$, où t est de degré 1. Alors un élément de A^{II} peut être vu comme une série formelle

$$f(t) = 1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \dots$$

à coefficients dans Λ . En particulier, $1 + t$ est un tel élément.

LEMME 1 (HIRZEBRUCH)

Il existe une unique séquence multiplicative K à coefficients dans Λ satisfaisant

$$K(1 + t) = f(t).$$

Ou de façon équivalente, K satisfait la condition que le coefficient de x_1^n dans $K_n(x_1, \dots, x_n)$ est égal à λ_n .

On dira dans un tel cas de figure que K est la séquence multiplicative *appartenant* à la série formelle $f(t)$. Remarquons que si K appartient à la série $f(t)$, alors pour tout A^* et tout $a_1 \in A^1$, l'identité

$$K(1 + a_1) = f(a_1)$$

reste vraie (ce qui ne serait pas le cas si a_1 n'était pas de degré 1).

La preuve de ce lemme étant relativement élémentaire mais longue (on pourra consulter [MS74]), il paraît plus intéressant de faire un calcul explicite. Le calcul qui suit devrait être suffisamment éclairant et est celui qui correspondra au L -polynôme associé à la signature.

On va donc calculer les premiers termes de la séquence multiplicative, K , associée à la série

$$f(t) = \frac{\sqrt{t}}{\tanh \sqrt{t}} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{45}t^2 + \dots + (-1)^{k-1} 2^{2k} B_k \frac{t^k}{(2k)!} + \dots$$

où les B_k sont les nombres de BERNOULLI.

L'idée va être de considérer les polynômes symétriques élémentaires :

$$\sigma_n = (1 + t_1) \cdots (1 + t_n)$$

où les t_i sont de degré 1. Comme t_i est de degré 1, on sait que si K appartient à la série $f(t)$, alors $K(1 + t_i) = f(t_i)$. De sorte que le calcul consiste en fait à développer l'égalité

$$K(\sigma_n) = K(1 + t_1) \cdots K(1 + t_n) = f(t_1) \cdots f(t_n)$$

pour obtenir le terme K_n de la séquence K . L'unicité s'ensuit et l'existence se fait par un calcul explicite.

Pour $n = 1$. Comme $f(t) = 1 + t/3 + \dots$, on a $K(1 + t_1) = f(t_1) = 1 + t/3$ ce qui montre que $K_1(a_1) = a_1/3$.

Pour $n = 2$. On développe σ_2 :

$$(1 + t_1)(1 + t_2) = 1 + (t_1 + t_2) + t_1 t_2$$

de sorte que pour trouver $K_2(a_1, a_2)$ on prend $a_1 = t_1 + t_2$, $a_2 = t_1 t_2$ et on développe l'égalité que l'on va tronquer à l'ordre 2 :

$$K(1 + a_1 + a_2) = 1 + K_1(t_1 + t_2) + K_2(t_1 + t_2, t_1 t_2) + \dots = f(t_1)f(t_2).$$

On obtient ainsi (après n'avoir sélectionné que les éléments de degrés au plus 2) :

$$\begin{aligned} K_2(a_1, a_2) &= f(t_1)f(t_2) - 1 - K_1(a_1) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}t_1 - \frac{1}{45}t_1^2\right) \left(1 + \frac{1}{3}t_2 - \frac{1}{45}t_2^2\right) - 1 - \frac{t_1 + t_2}{3} \\ &= -\frac{1}{45}(t_1^2 + t_2^2) + \frac{1}{9}t_1 t_2 \\ &= -\frac{1}{45}(t_1 + t_2)^2 + \frac{2}{45}t_1 t_2 + \frac{5}{45}t_1 t_2 \\ &= \frac{1}{45}(-a_1^2 + 7a_2). \end{aligned}$$

Le cas n général. On procède comme précédemment. Le calcul de K_n se fait en développant $K(\sigma_n)$ en sélectionnant les termes de degrés au plus n . Par récurrence, chaque K_n existe et est unique, ce qui conclut.

2 THÉORÈME UNIFICATEUR

On considère à présent M^m , une variété lisse compacte orientée. De sorte que M définit une classe dans l'anneau de cobordisme orienté Ω_* .

Soit K une série multiplicative. On définit le K -genre, $K[M^m]$, comme étant nul si la dimension m n'est pas divisible par 4, et sinon comme étant égal à

$$K_n[M^{4n}] = \langle K_n(p_1, \dots, p_n), [M] \rangle$$

avec $m = 4n$ et p_i la i -ème classe de PONTYAGIN du fibré tangent de M .

En particulier, le K -genre de M est une combinaison de ses nombres de PONTYAGIN.

LEMME 1

Pour toute séquence multiplicative K à coefficients rationnels, la correspondance $M \mapsto K[M]$ définit un homomorphisme d'anneaux, de l'anneau de cobordisme Ω_* vers \mathbf{Q} .

PREUVE

La correspondance est bien additive et la théorie des nombres de PONTYAGIN nous dit que le K -genre d'un bord est nul, voir (1, p. 37).

Pour une variété produit, $M \times M'$, la classe totale de PONTYAGIN est congrue à $p \times p'$ modulo les éléments d'ordre 2. On a

$$K(p \times p') = K(p) \times K(p')$$

et donc

$$\langle K(p \times p'), [M] \times [M'] \rangle = (-1)^{mm'} \langle K(p), [M] \rangle \langle K(p'), [M'] \rangle.$$

Comme m et m' sont divisible par 4, on a certainement $(-1)^{mm'} = 1$. Ainsi,

$$K[M \times M'] = K[M]K[M']$$

comme désiré. ■

3 LE THÉORÈME DE LA SIGNATURE DE HIRZEBRUCH

On définit la *signature*, $\sigma(M)$, d'une variété compacte orientée M^m comme étant nulle si m n'est pas divisible par 4, et sinon comme étant la signature de la forme quadratique $a \mapsto \langle a \cup a, \mu \rangle$.

Aussi, on a les faits suivants (voir (4, p. 24)).

LEMME 1 (THOM)

La signature a les propriétés suivantes

- (1) $\sigma(M + M') = \sigma(M) + \sigma(M')$;
- (2) $\sigma(M \times M') = \sigma(M)\sigma(M')$; §1
- (3) si M est un bord orienté alors $\sigma(M) = 0$.

On considère par la suite M^{4k} , une variété fermée orientée. On désigne par p_1, \dots, p_k les classes de PONTRYAGIN du fibré tangent de M .

THÉORÈME 2 (Signature, HIRZEBRUCH)

Soit $L(p)$ la séquence multiplicative appartenant à la série

$$\frac{\sqrt{t}}{\tanh \sqrt{t}} = 1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{45}t^2 + \dots + (-1)^{k-1}2^{2k}B_k \frac{t^k}{(2k)!} + \dots$$

alors la signature $\sigma(M)$ est égale au L -genre $L[M^{4k}]$.

Les calculs comme faits dans la première section donnent les quatre premiers L -polynômes :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{3}p_1, \\ L_2 &= \frac{1}{45}(-p_1^2 + 7p_2), \\ L_3 &= \frac{1}{945}(2p_1^3 - 13p_1p_2 + 62p_3), \\ L_4 &= \frac{1}{14175}(-3p_1^4 + 22p_1^2p_2 - 71p_1p_3 - 19p_2^2 + 381p_4). \end{aligned}$$

PREUVE

Puisque $M \mapsto \sigma(M)$ et $M \mapsto L[M]$ sont deux homomorphismes d'anneaux de $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ dans \mathbf{Q} , il suffit de vérifier ce théorème sur les générateurs de $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$. L'étude de $\Omega_* \otimes \mathbf{Q}$ nous dit qu'un ensemble de générateurs est fourni par les espaces projectifs complexes $\mathbf{C}P^{2k}$.

Pour calculer la signature de $\mathbf{C}P^{2k}$, on remarque que g^k engendre $H^{2k}(\mathbf{C}P^{2k}; \mathbf{Q})$ et que

$$\langle g^k \cup g^k, [\mathbf{C}P^{2k}] \rangle = 1.$$

Ainsi, la signature de $\mathbf{C}P^{2k}$ est +1.

Pour calculer $L_k[\mathbf{C}P^{2k}]$, on utilise le fait que la classe totale de PONTRYAGIN de son fibré tangent est

$$p = (1 + g^2)^{2k+1}.$$

Puisque L appartient à la série $f(t) = \sqrt{t}/\tanh \sqrt{t}$, il s'ensuit que

$$L(1 + g^2 + 0 + \dots) = \frac{\sqrt{g^2}}{\tanh \sqrt{g^2}} = \frac{g}{\tanh g}$$

§1. Cette propriété se montre en utilisant la formule de KÜNNETH sur le second groupe de cohomologie, voir [Hir66].

et on en déduit

$$L(p) = \left(\frac{g}{\tanh g} \right)^{2k+1}.$$

Ainsi, le L -genre $\langle L(p), [\mathbf{C}P^{2k}] \rangle$ est égal à coefficient de g^{2k} de cette série entière. Il suffit donc de montrer que ce coefficient est $+1$ pour conclure.

Pour obtenir le coefficient de g^{2k} , on va substituer à g la variable complexe z et calculer le résidu de cette fonction divisée par $[z^{2k+1}(2i\pi)]$ en intégrant autour de l'origine. Le changement de variable $u = \tanh z$ donne

$$dz = \frac{du}{1-u^2} = (1 + u^2 + u^4 + \dots) du$$

et il vient

$$\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{dz}{(\tanh z)^{2k+1}} = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{(1 + u^2 + u^4 + \dots) du}{u^{2k+1}} = 1.$$

Et cela conclut. ■

Donnons deux conséquences au théorème de la signature.

COROLLAIRE 3

Le L -genre d'une variété lisse fermée orientée est un entier.

PREUVE

C'est en raison du fait que la signature d'une forme bilinéaire symétrique est toujours un entier. ■

COROLLAIRE 4

Le L -genre, $L[M]$, ne dépend que du type d'homotopie orientée de M

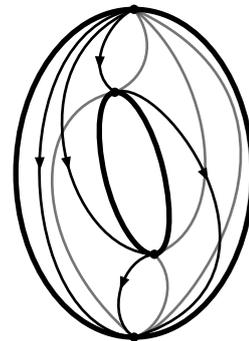
Ce dernier corollaire est à mettre en perspective avec un résultat de NOVIKOV :

THÉORÈME 5 (NOVIKOV)

Les classes rationnelles de PONTRYAGIN, $p_k(M, \mathbf{Q}) \in H^{4k}(M; \mathbf{Q})$ sont des invariants topologiques.

Chapitre 5

Théories de MORSE et de LEFSCHETZ



La théorie de MORSE est une théorie très élégante permettant de relier la géométrie des variétés à leur topologie.

Parmi les résultats importants qui sont conséquences, il y a la décomposition cellulaire des variétés lisses compactes et la périodicité de BOTT. La référence classique pour aborder la théorie de MORSE est [Mil73]. On peut également consulter [Voi03] (en anglais) ou [Voi02] (en français).

Mais la théorie de MORSE permet en fait d'aller plus loin, et notamment de décrire l'homologie de MORSE d'une variété, qui est isomorphe à l'homologie cellulaire usuelle. On obtient alors une incarnation géométrique des groupes d'homologie et de cohomologie singulières. Cette théorie a des liens étroits avec la théorie des systèmes dynamiques. Un exposé de cette théorie est donné dans [AD14], mais nous n'en discuterons pas ici.

Le but de ce chapitre va être de démontrer un théorème de LEFSCHETZ. Ce théorème nous permettra notamment de montrer que certaines surfaces complexes considérées par la suite sont bien simplement connexes.

1 RÉSULTATS DE THÉORIE DE MORSE

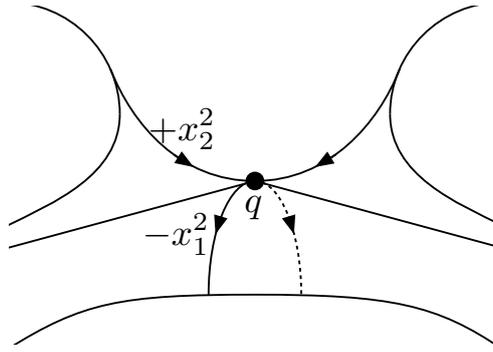
Nous allons introduire ici les principaux résultats de la théorie de MORSE. Les justifications peuvent être trouvées dans la bibliographie ci-dessus citée.

Le point de départ est le suivant. On considère une variété compacte M^n plongée dans \mathbf{R}^{n+k} . Certaines fonctions $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ sont sans point critique dégénéré, on dit qu'elles sont *de MORSE*. Le lemme de MORSE montre qu'autour d'un point critique q , on a :

$$f(x) = f(q) - x_1^2(x) - \cdots - x_r^2(x) + x_{r+1}^2(x) + \cdots + x_n^2(x),$$

avec x_i des coordonnées locales de M autour de q . On parle de *carte de MORSE*. L'entier r est un invariant par changement de telles cartes, c'est *l'indice* de f au point critique (non dégénéré) q .

Géométriquement, on peut comprendre cette expression comme la description locale de la topologie de M : c'est une selle à cheval avec r directions de trajectoires (pour une certaine dynamique que nous n'allons pas décrire) allant vers le bas et $(n - r)$ venant du haut.

FIGURE 5.1 – Lemme de MORSE dans le cas $f = f(q) - x_1^2 + x_2^2$.

En s'éloignant des points critiques (qui sont en nombre fini si M est compacte), les sous-niveaux de M :

$$f^{-1}([0, b]) \text{ et } f^{-1}([0, b + \varepsilon])$$

sont difféomorphes. Ainsi, la topologie de M est décrite par l'apparition des points critiques.

Si q est un point critique d'indice r de valeur critique b , alors $M^{b+\varepsilon} = f^{-1}([0, b + \varepsilon])$ est obtenu à partir de $M^{b-\varepsilon} = f^{-1}([0, b - \varepsilon])$ en y attachant une r -cellule. Par ailleurs, en complétant cette r -cellule en une anse de dimension n , on obtient un homéomorphisme. C'est le premier théorème de la théorie de MORSE. En particulier, cette théorie montre que toute variété compacte est homotopiquement équivalente à un CW-complexe de dimension au plus n .

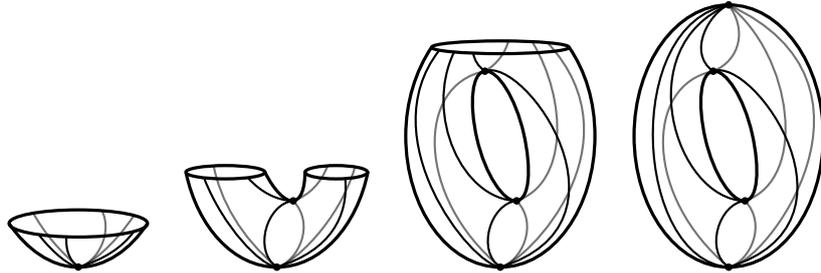


FIGURE 5.2 – Théorie de MORSE

Certaines fonctions de MORSE remarquables vont nous intéresser. Ce sont les fonctions de hauteur :

$$L_p(x) = \|x - p\|^2$$

pour $p \in \mathbf{R}^{n+k}$ choisi (on a fixé un plongement de M dans \mathbf{R}^{n+k}). Génériquement, ces fonctions sont bien de MORSE.

Les indices des points critiques de telles fonctions sont géométriquement descriptibles. Commençons par considérer ν le fibré normal de M dans \mathbf{R}^{n+k} . On peut décrire ν de la façon suivante :

$$\nu = \left\{ (x, v) \in M \times \mathbf{R}^{n+k} \mid v \text{ orthogonal à } T_x M \right\}$$

avec $T_x M$ le sous-espace vectoriel (et non affine) de \mathbf{R}^{n+k} tangent à M en x . Maintenant, en considérant l'application :

$$E: \begin{cases} \nu \rightarrow \mathbf{R}^{n+k} \\ (x, v) \mapsto x + v \end{cases}$$

alors certains points de ν sont critiques. Ils correspondent aux intersections des fibres normales à M si on les plonge simultanément dans \mathbf{R}^{n+k} . Ces points critiques, on les appelle *points focaux*.

Les points focaux d'une paire (M, q) , avec q point critique de L_p , sont ceux qui s'écrivent $q + v$ avec $(q, v) \in \nu$.

PROPOSITION 1

Si q est un point critique de L_p , alors son indice est le nombre de points focaux de (M, q) situés le long du segment reliant p à q .

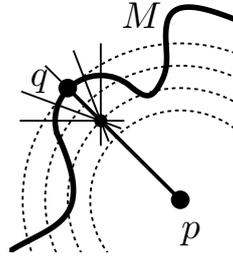


FIGURE 5.3 – Points focaux.

La preuve se fait par le calcul (voir [Mil73]), mais nous pouvons formuler une remarque géométrique qui donne l'idée de cette preuve. Si M était une courbe et si la courbure en q était $1/r$, alors localement autour de q , M est un arc de cercle d'un cercle de rayon r . Le centre de ce cercle est précisément le point focal potentiel.

2 THÉORIE DE LEFSCHETZ

Considérons à présent une variété complexe M de dimension complexe n (donc de dimension réelle $2n$). Nous allons suivre l'exposé de [Mil73, §7]. Le premier théorème que nous allons montrer est le suivant.

THÉORÈME 1

Si M est une variété analytique complexe banalytiquement plongée comme partie fermée de \mathbf{C}^r , alors M a le même type d'homotopie qu'un CW-complexe de dimension (réelle) n .

Ce théorème a donc fait diminué d'un facteur deux la dimension de M à équivalence d'homotopie près. En particulier :

THÉORÈME 2

Les groupes d'homologie $H_i(M; \mathbf{Z})$ sont nuls pour $i > n$.

Commençons par considérer une forme quadratique à n variables complexes

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} z_i z_j.$$

La substitution $z_k = (x_k + iy_k)$ permet d'obtenir une forme quadratique en $2n$ variables réelles :

$$Q'(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \operatorname{Re} \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} (x_i + iy_i)(x_j + iy_j) \right).$$

LEMME 3

Si λ est valeur propre de Q' avec multiplicité μ , alors de même pour $-\lambda$.

PREUVE

La transformation $z \mapsto iz$ est orthogonale et on a $Q(iz) = -Q(z)$. Donc Q' peut être transformée en $-Q'$ par une transformation orthogonale. ■

Supposons à présent que M est une variété complexe bianalytiquement plongée dans \mathbf{C}^r comme partie fermée. Soit q un point de M .

LEMME 4

Si L est une droite normale à (M, q) alors les points focaux apparaissent par paires, situées symétriquement par rapport à q .

En d'autres termes, si $q + tv$ est un point focal alors $q - tv$ aussi et avec même multiplicité.

PREUVE

Soient $z = (z_1, \dots, z_n)$ des coordonnées locales de M autour de q , de sorte que $z(q) = 0$. Par hypothèse, l'inclusion $M \hookrightarrow \mathbf{C}^r$ induit r fonctions analytiques complexes

$$w_\alpha(z) = w_\alpha(z_1, \dots, z_n),$$

avec α compris entre 1 et r .

Soit v un vecteur normal à M en q . Le produit scalaire hermitien appliqué en v :

$$\sum_{\alpha=1}^r w_\alpha(z) \bar{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r w_\alpha(z_1, \dots, z_n) \bar{v}_\alpha$$

peut être développé en série entière :

$$\sum_{\alpha=1}^r w_\alpha(z_1, \dots, z_n) \bar{v}_\alpha = c + Q(z_1, \dots, z_n) + \dots$$

avec c une constante et Q une fonction quadratique homogène (les termes linéaires sont nuls puisque v est normal à M).

En transformant Q en Q' comme exposé précédemment, il vient que les valeurs propres de Q' viennent par paires et donc que les points focaux de (M, q) passant par la droite dirigée par q et $q + v$ aussi. ■

On peut maintenant procéder à la preuve du théorème (1, p. 53) annoncé.

PREUVE

Soit $p \in \mathbf{C}^r$ de sorte que la distance au carré par rapport à p ,

$$L_p: M \rightarrow \mathbf{R},$$

soit de MORSE. Comme M est un fermé de \mathbf{C}^r , il vient que les

$$M^a := L_p^{-1}([0, a])$$

sont compacts.

Maintenant, si q est un point critique de L_p , alors son indice est le nombre de points focaux de (M, q) le long du segment reliant p à q . Comme il y a au plus $2n$ tels points sur la droite reliant p et q et puisqu'ils sont distribués symétriquement par rapport à q , on en conclut que l'indice de q est au plus n . ■

Un corollaire de ce théorème est le théorème sur les sections hyperplanes de LEFSCHETZ. C'est ce théorème qui nous sera utile par la suite.

THÉORÈME 5 (LEFSCHETZ)

Soit V une variété algébrique complexe de dimension n , incluse dans $\mathbf{C}P^r$. Soit P un hyperplan de $\mathbf{C}P^r$ contenant les points singuliers de V (s'il y en a).

L'inclusion $V \cap P \hookrightarrow V$ induit des isomorphismes :

$$H_k(V \cap P; \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(V; \mathbf{Z})$$

pour tout $k \leq n - 2$. L'homomorphisme

$$H_{n-1}(V \cap P; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{n-1}(V; \mathbf{Z})$$

est quant à lui surjectif.

En particulier si V est non singulière, alors de nombreux groupes d'homologie singulière sont nuls.

PREUVE

La suite exacte de la paire $(V, V \cap P)$:

$$H_{k+1}(V, V \cap P; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_k(V \cap P; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_k(V; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_k(V, V \cap P; \mathbf{Z})$$

montre qu'il suffit de montrer que

$$\forall k \leq n - 1, H_k(V, V \cap P; \mathbf{Z}) = 0.$$

On remarque tout d'abord que $V - (V \cap P)$ est une variété algébrique affine sans singularité plongée dans $\mathbf{C}P^r - P \simeq \mathbf{C}^r$. Par le théorème (1, p. 53), $V - (V \cap P)$ a une structure cellulaire de dimension (réelle) n et donc

$$\forall k \leq n - 1, H^{2n-k}(V - (V \cap P); \mathbf{Z}) = 0.$$

La dualité de LEFSCHETZ (voir [Hat01, p. 254]) :

$$\forall k \leq 2n, H_k(V, V \cap P; \mathbf{Z}) \simeq H^{2n-k}(V - (V \cap P); \mathbf{Z}).$$

permet de conclure. ■

Il existe même une version plus forte, qui est la suivante.

THÉORÈME 6

Sous les mêmes hypothèses, les groupes d'homotopie de la paire $\pi_k(V, V \cap P)$ sont nuls pour $k < n$.

PREUVE

On admet qu'il existe un voisinage U de $V \cap P$ qui se rétracte par déformation sur $V \cap P$ relativement à $\mathbf{C}P^r - V$ (c'est une conséquence du fait que les variétés algébriques peuvent être triangulées).

Au lieu de considérer $L_p: V - V \cap P \rightarrow \mathbf{R}$, on introduit $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V \cap P \\ \frac{1}{L_p(x)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les points critiques de L_p ont des indices d'au plus n , donc ceux de f ont des indices d'au moins $2n - n = n$.

Aussi, f n'a pas de point critique non dégénéré lorsque $\varepsilon \leq f < +\infty$. Donc V a le même type d'homotopie que $V^\varepsilon = f^{-1}([0, \varepsilon])$, qui a un nombre fini de cellules de dimensions au moins n .

On choisit ε petit de sorte que $V^\varepsilon \subset U$. Si I^k désigne le cube unitaire de dimension k et J^k son intérieur, alors toute application de la paire (I^k, J^k) dans $(V^\varepsilon, V \cap P)$ peut être déformée en une application de (I^k, J^k) dans $(U, V \cap P)$ et comme $k < n$, il vient qu'elle se déforme pour être à valeurs dans $(V \cap P, V \cap P)$, ce qui conclut. ■

En particulier, nous avons montré que si M est une variété projective complexe sans singularité, alors elle est simplement connexe.

Deuxième partie

Topologie des variétés de dimension quatre

Chapitre 6

Théâtre de la dimension quatre

Nous allons maintenant débiter l'exposé sur la topologie des variétés de dimension quatre. Si nous dédions à cette dimension une place particulière dans ce mémoire, ce n'est pas sans raison. De nombreux résultats sont exclusifs à cette dimension.

Si l'on devait résumer en quelques phrases l'étonnement que l'on peut avoir en travaillant en dimension quatre, il semblerait que les faits suivants soient les plus illustrateurs.

- (1) Il existe des structures exotiques sur \mathbf{R}^4 , §1 alors que ça n'est le cas pour aucun autre espace euclidien.
- (2) Deux variétés lisses simplement connexes sont homéomorphes si, et seulement si, elles ont même forme d'intersection.

Notre but sera de nous intéresser à la classification à homéomorphisme près des variétés de dimension quatre. En particulier, nous nous intéresserons de très près à la forme d'intersection. Rappelons succinctement les résultats obtenus précédemment à son sujet.

Si M est une variété lisse orientable et fermée §2 de dimension quatre, alors elle définit naturellement une forme bilinéaire symétrique unimodulaire $Q_M: H^2(M; \mathbf{Q}) \times H^2(M; \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{Q}$ donnée par :

$$Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle,$$

où $[M]$ désigne la classe fondamentale de M . En utilisant la dualité de POINCARÉ (adaptée dans le cas où l'on prendrait M à bord), cette forme correspond à la forme d'intersection géométrique, comme discuté au chapitre 4 en section (3, p. 23). Aussi, en ne passant à la dualité que sur l'un des deux facteurs, on obtient :

$$Q_M: H^2(M; \mathbf{Q}) \rightarrow \text{Hom}(H_2(M; \mathbf{Q}); \mathbf{Q}),$$

§1. Cela signifie que des structures différentiables sur la variété topologique \mathbf{R}^4 ne sont pas isomorphes. Historiquement, les premières structures exotiques ont été trouvées sur la sphère S^7 par MILNOR dans les années 50 (voir [Die89]).

§2. Ou comme nous le verrons par la proposition (4, p. 61), si ∂M est une sphère d'homologie.

qui est une forme de pairage, donnée par

$$Q_M(\alpha) = \left(\beta \mapsto \langle \alpha \cup \text{PD}^{-1}(\beta), [M] \rangle \right)$$

et établit explicitement un isomorphisme entre $H^2(M; \mathbf{Q})$ et $\text{Hom}(H_2(M; \mathbf{Q}); \mathbf{Q})$.

À propos de cette forme d'intersection, nous avons montré un résultat sur sa signature, appelé théorème de la signature de HIRZEBRUCH. En dimension quatre, si $\sigma(M)$ désigne la signature de Q_M , diagonalisée dans le corps des réels, alors

$$\sigma(M) = \left\langle \frac{1}{3}p_1(M), [M] \right\rangle.$$

Jusqu'ici nous avons toujours considéré Q_M comme agissant sur les groupes de cohomologie (ou d'homologie, selon ce qui précède) à coefficients dans \mathbf{Q} . Par la suite, nous ferons un abus en considérant que les coefficients sont pris dans \mathbf{Z} . Cela est parfaitement transparent lorsque $H^2(M; \mathbf{Z})$ n'a pas d'éléments de torsion et le cas échant, on les ignore. De sorte que, on considère maintenant que Q_M est une forme bilinéaire agissant sur un module libre : $\mathbf{Z}^{b_2(M)} \simeq H^2(M; \mathbf{Z})$. §3

1 FLORILÈGE DE RÉSULTATS

Cette première section poursuit l'introduction. Nous allons donner plusieurs résultats à garder en vue pour comprendre ce qui va motiver la suite de ce mémoire.

On va en premier lieu donner les éléments de classification des formes bilinéaires. Cela nous permettra d'aborder le théorème de FREEDMAN en appliquant ces résultats aux formes d'intersection de variétés.

1.1 Classification des formes bilinéaires non définies

Par la suite, on va considérer que les formes bilinéaires unimodulaires sont de la forme $Q : M \times M \rightarrow \mathbf{Z}$, où M est un \mathbf{Z} -module libre. Pour les preuves et un exposé complet, on pourra se référer à [Ser70] et notamment [Ser70, p. 93, théorème 6].

THÉORÈME 1 (SERRE)

Soient Q', Q'' deux formes bilinéaires unimodulaires. Si Q' et Q'' sont toutes les deux non définies, alors elles sont isomorphes si, et seulement si, elles ont même rang, signature et parité.

Il convient peut-être ici de rappeler ce qu'est la parité d'une forme bilinéaire. Soit Q une forme bilinéaire unimodulaire. Alors

- s'il existe $\alpha \in M$ tel que $Q(\alpha, \alpha)$ est un entier impair, alors Q est *impaire* ;
- sinon Q est *paire*.

On pensera à comparer cette définition avec le résultat (1, p. 60) qui va suivre.

Pour la classification, on retiendra le fait suivant.

PROPOSITION 2

Soit Q une forme bilinéaire symétrique unimodulaire.

- Si Q est non définie et impaire, alors à isomorphisme près :

$$Q = \bigoplus m[+1] \bigoplus n[-1].$$

§3. Ce changement correspond à la pratique observée, par exemple dans [Sco05] ou encore [GS99]. Comme la plupart des variétés considérées n'ont pas de 2-cocycle de torsion, cela n'a de toute façon pas de réelle importance.

- Si Q est non définie et paire, alors à isomorphisme près :

$$Q = \bigoplus \pm m E_8 \oplus n H.$$

Ici, on a désigné par H et E_8 les formes de matrices respectives :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & & 1 & 2 & & \\ & & & & & & 1 & & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2 Formes d'intersection et classification topologique

Remarquons tout d'abord que l'on peut encore définir une forme d'intersection pour des variétés topologiques (non nécessairement munies d'une structure différentiable). Ainsi, on peut s'intéresser à la classification topologique des variétés selon leurs formes d'intersection.

Les travaux de FREEDMAN ont produit le résultat suivant.

THÉORÈME 3 (FREEDMAN)

Soit Q une forme bilinéaire unimodulaire. Alors il existe une variété topologique simplement connexe de dimension quatre ayant Q pour forme d'intersection. De plus, à homéomorphisme près,

- si Q est paire, alors une telle variété est unique ;
- si Q est impaire, alors deux telles variétés existent, et au moins l'une des deux n'admet pas de structure différentiable.

Il y a deux remarques que nous pouvons à présent formuler.

Tout d'abord, ce théorème implique que si M est une variété lisse simplement connexe, alors M est homéomorphe à toute variété lisse ayant Q_M pour forme d'intersection. En effet, que Q_M soit paire ou non, il n'existe au plus qu'une seule variété lisse ayant Q_M pour forme d'intersection.

La seconde remarque est que ce théorème suggère la possibilité de certaines variétés topologiques n'admettant aucune structure différentiable. Nous avons déjà construit dans l'annexe (A, p. 26) une telle variété, appelée \mathcal{M}_{E_8} , et ayant pour forme d'intersection E_8 . La raison pour laquelle elle n'admet pas de structure différentiable sera exposée dans la section suivante.

En remarquant que la forme d'intersection d'une somme connexe est la somme directe des formes d'intersections, une autre conséquence de ce théorème est le résultat suivant.

COROLLAIRE 4

Si l'on a $Q_M = Q' \oplus Q''$ alors il existe deux variétés topologiques N' et N'' telles que $M = N' \# N''$.

Ainsi, il y a une correspondance parfaite entre les sommes connexes et les facteurs directs dans la décomposition d'une forme d'intersection. On gardera donc à l'esprit que toute décomposition de Q_M équivaut à une décomposition de M en somme connexe de variétés topologiques (non nécessairement différentiables).

Au regard de la partie précédente, on pourrait rencontrer des formes d'intersections unimodulaires et définies. En tant que simples formes bilinéaires symétriques, elles sont généralement très mal comprises. Cependant, DONALDSON a démontré le fait suivant.

THÉORÈME 5 (DONALDSON)

Les formes bilinéaires unimodulaires $\oplus m[+1]$ et $\oplus n[-1]$ sont les seules réalisables comme formes d'intersection définies et unimodulaires d'une variété lisse de dimension quatre.

Ainsi, ces variétés aux formes d'intersections définies sont homéomorphes à $\sharp m\mathbf{CP}^2$ ou $n\sharp\overline{\mathbf{CP}^2}$.

La conséquence de ces deux résultats pour les variétés lisses est la classification suivante.

COROLLAIRE 6

Deux variétés lisses simplement connexes de dimension quatre sont homéomorphes si, et seulement si, leurs formes d'intersection ont même rang, signature et parité. Aussi, toute telle variété est homéomorphe à

$$\sharp m\mathbf{CP}^2\sharp n\overline{\mathbf{CP}^2} \text{ ou } \sharp \pm m\mathcal{M}_{E_8}\sharp nS^2 \times S^2.$$

2 SUR LA FORME D'INTERSECTION DES VARIÉTÉS LISSES

Nous allons donner ici quelques résultats sur les formes d'intersections lorsque l'on s'intéresse aux variétés de dimension quatre.

Commençons par le lemme suivant, qui est une simple conséquence de l'exposé sur la deuxième formule de Wu.

LEMME 1 (Formule de Wu)

Soit M une variété lisse simplement connexe fermée de dimension quatre. Alors

$$w_2(M) \cdot S = S \cdot S \pmod{2}.$$

PREUVE

Pour rappel, comme M est simplement connexe, $w_2(M) = v_2$ pour un certain cocycle v_2 tel que

$$v_2 \cup x = \text{Sq}^2(x).$$

Maintenant, puisque nous sommes en dimension quatre, S est un cocycle de degré deux et donc $\text{Sq}^2(S) = S \cup S$, ce qui conclut. ■

En particulier, si $w_2(M) = 0$ alors la forme d'intersection de M est paire. Remarquons aussi que le fait $w_2(M) = 0$ pour une variété simplement connexe exprime l'existence d'une structure spin (voir [GS99]).

Cela signifie aussi que si Q_M est impaire, alors M n'admet pas de structure spin. En particulier, les sommes connexes de copies de \mathbf{CP}^2 et de $\overline{\mathbf{CP}^2}$ n'admettent pas de structure spin.

Enfin, notons que si $H_1(M; \mathbf{Z})$ n'admet pas d'éléments de 2-torsion (par exemple parce que M est simplement connexe), alors $w_2(M) = 0$ si Q_M est paire. En effet, les éléments de $H^2(M; \mathbf{Z})$ proviennent de la partie libre de $H_2(M; \mathbf{Z})$ et de la partie de torsion de $H_1(M; \mathbf{Z})$. Mais cette partie de torsion ne contient pas d'élément de 2-torsion. Le théorème des coefficients universels montre alors que $H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ consiste en la réduction modulo 2 de la partie libre de $H_2(M; \mathbf{Z})$. Si $w_2(M) \neq 0$ alors le dual de POINCARÉ, disons S est une surface, vérifie $w_2(M) \cdot S = 1$, qui est impair.

Le théorème suivant a beaucoup d'importance. Il permet de montrer que certaines variétés n'admettent pas de structure différentiable, comme par exemple la variété \mathcal{M}_{E_8} dont la forme d'intersection est E_8 .

THÉORÈME 2 (ROKHLINE)

Soit M une variété lisse fermée. Si $w_2(M) = 0$ alors $\sigma(M)$ est divisible par 16.

Une preuve géométrique est donnée dans [Kir89].

Dans le cas de la variété \mathcal{M}_{E_8} , la signature de E_8 est 8. De sorte que \mathcal{M}_{E_8} ne peut pas être une variété lisse avec une structure spin. Mais \mathcal{M}_{E_8} n'a de plus pas d'élément de 2-torsion car elle est simplement connexe, de sorte que si \mathcal{M}_{E_8} avait une structure lisse, alors le cocycle $w_2(\mathcal{M}_{E_8})$ serait nul (car E_8 est paire) et le théorème s'appliquerait.

Plus généralement, on observe qu'aucune variété lisse simplement connexe dont la forme d'intersection est paire ne peut avoir de signature égale à 8. De sorte que la première signature non évidente est 16. Elle sera réalisée par la surface $K3$, comme on le verra par la suite.

On peut formuler le corollaire suivant, qui suit aussi cet argument.

COROLLAIRE 3

Si M est une variété lisse fermée, a une forme d'intersection paire et n'a pas d'élément de 2-torsion, alors sa forme d'intersection est

$$Q_M = \bigoplus \pm m E_8 \bigoplus n H$$

et m doit être un entier pair.

PREUVE

Parce que H a une signature nulle, la signature de M est déterminée par $\sigma(M) = 8m$ et donc m est pair. ■

Notons qu'il existe bien des contre-exemples si l'on essaye de lever l'hypothèse de non existence d'éléments de 2-torsion. En effet, la surface complexe d'ENRIQUES (qui est doublement revêtue par la surface $K3$ que nous présenterons plus tard) est lisse, fermée et pourtant a pour forme d'intersection $-E_8 \oplus H$. À noter que puisqu'elle est doublement revêtue par $K3$, qui est simplement connexe, on a $\pi_1 = \mathbf{Z}_2$, de sorte que cela ne contredit par le corollaire précédent.

Terminons ce chapitre par un résultat sur les variétés lisses compactes à bord. Jusqu'à présent nous n'avons traité que les variétés fermées. Cependant il y a quelque chose d'intéressant qui peut être dit au sujet des variétés à bord.

PROPOSITION 4

Soit M une variété lisse compacte à bord et orientée de dimension quatre. Supposons que $H_1(M; \mathbf{Z}) = 0$. Alors ∂M est une sphère d'homologie si, et seulement si, Q est unimodulaire.

PREUVE

Il s'agit d'utiliser la dualité de POINCARÉ avec la suite exacte de la paire $(M, \partial M)$. Cette preuve est proposée dans [Sco05].

D'une part, la dualité de POINCARÉ donne l'isomorphisme

$$H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq H^2(M; \mathbf{Z})$$

et puisque $H_1(M; \mathbf{Z}) = 0$, il vient par le théorème des coefficients universels que

$$H^2(M; \mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}(H_2(M; \mathbf{Z}); \mathbf{Z}).$$

De sorte que

$$H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}(H_2(M; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}).$$

Mais cet isomorphisme est le pairing donné par la forme d'intersection. Comme c'est un isomorphisme, la forme d'intersection est unimodulaire.

Supposons à présent que Q est unimodulaire. Soit j l'inclusion $(M, \emptyset) \subset (M, \partial M)$. On considère le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H_2(M; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \\ & \searrow Q & \swarrow \text{PD}^{-1} \simeq \\ & \text{Hom}(H_2(M; \mathbf{Z}); \mathbf{Z}) & \end{array}$$

On constate que j_* est un isomorphisme si, et seulement si Q l'est. Mais j_* se situe aussi dans la suite exacte de la paire :

$$\begin{array}{ccccccc} H_3(M, \partial M; \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_2(\partial M; \mathbf{Z}) & \longrightarrow & H_2(M; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{j_*} & H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & H_1(\partial M; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(M; \mathbf{Z}) \end{array}$$

et puisque $H_1(M; \mathbf{Z}) = 0$ on a $H_3(M, \partial M; \mathbf{Z}) \simeq H^1(M; \mathbf{Z}) = \text{Hom}(H_1(M; \mathbf{Z}); \mathbf{Z}) = 0$ et donc cette suite exacte donne :

$$0 \longrightarrow H_2(\partial M; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_2(M; \mathbf{Z}) \xrightarrow{j_*} H_2(M, \partial M; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\partial M; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

et puisque j_* est un isomorphisme, on en conclut que ∂M a l'homologie d'une 3-sphère.

■

On peut déjà donner une première construction d'une fibration qui ne soit pas triviale (c'est-à-dire pas un simple produit). La fibre générique ne sera pas une courbe elliptique mais une droite, c'est-à-dire \mathbf{CP}^1 . On généralisera cette construction par la suite afin de décrire notre première surface elliptique.

Décrivons ainsi une application (qui ne sera pas définie partout) de \mathbf{CP}^2 vers \mathbf{CP}^1 dont la fibre est \mathbf{CP}^1 . Posons $P = [0 : 0 : 1]$. On considère les droites passant par P dans \mathbf{CP}^2 . Si $\ell \subset \mathbf{CP}^2$ est une telle droite, alors elle est donnée par l'équation $t_0x = t_1y$, avec $[t_0 : t_1] \in \mathbf{CP}^1$.

Choisissons maintenant $Q \in \mathbf{CP}^2$ distinct de P . Alors il existe une unique droite ℓ passant par Q et P . En effet, si $Q = [a : b : c]$ alors la droite ℓ est donnée par le paramètre $[t_0 : t_1] = [b : a]$.

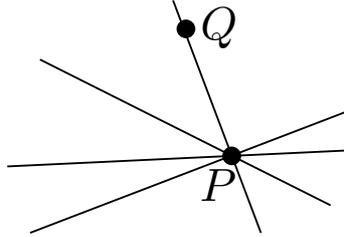


FIGURE 7.2 – Fibration de \mathbf{CP}^2 au-dessus de \mathbf{CP}^1 .

On a ainsi construit une application

$$\phi: \begin{cases} \mathbf{CP}^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbf{CP}^1 \\ [a : b : c] \mapsto [b : a] \end{cases}$$

qui est une fibration et dont la fibre générique est \mathbf{CP}^1 .

Pour obtenir une fibration définie sur une surface compacte, il reste à éclater en P . §2 En éclatant \mathbf{CP}^2 en P , on obtient la surface $\mathbf{CP}^2 \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ de sorte que ϕ est définie sur le complémentaire de $\overline{\mathbf{CP}^2}$ par la même expression.

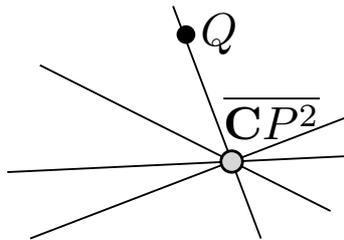


FIGURE 7.3 – Éclatement de \mathbf{CP}^2 en P .

1.1 Construction de la surface elliptique $E(1)$

À présent, nous allons construire notre première surface elliptique : ce sera la surface $E(1)$. Pour ce faire, nous allons généraliser la construction précédente, de sorte que les droites considérées deviennent des courbes de degré d , avec d laissé au choix.

Soient p_0, p_1 deux polynômes homogènes génériques de degré d . Alors pour tout point $Q \in \mathbf{CP}^2$, il existe $[t_0 : t_1]$ de sorte que $t_0p_0(Q) = t_1p_1(Q)$.

§2. Sans entrer dans les détails de l'éclatement (voir [GS99] ou [Sco05] si nécessaire), on retiendra qu'éclater en un point consiste topologiquement à effectuer une somme connexe avec $\overline{\mathbf{CP}^2}$ et que la sphère exceptionnelle est la partie $\overline{\mathbf{CP}^1} \subset \overline{\mathbf{CP}^2}$.

La plupart du temps, le paramètre $[t_0 : t_1]$ est unique (il est donné par $[t_0 : t_1] = [p_1(Q) : p_0(Q)]$). Mais cela n'est pas le cas lorsque $p_0(Q)$ et $p_1(Q)$ sont simultanément nuls. Précédemment, cela signifiait que $Q = P$, et maintenant cela signifie que Q appartient à l'intersection des deux courbes définies par p_0 et p_1 . De tels points, il y en a d^2 , et on désigne par \tilde{E} l'ensemble de ces points^{§3}.

Une telle association, $Q \mapsto [p_1(Q) : p_0(Q)]$, constitue un *pinceau*. Il est déterminé par les polynômes p_0 et p_1 . Ce n'est pas une fibration car il possède des points d'indétermination (le lieu des zéros communs).

Cependant, on peut définir de la même façon

$$\Phi: \begin{cases} \mathbf{CP}^2 \setminus \tilde{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1 \\ Q \mapsto [p_1(Q) : p_0(Q)]. \end{cases}$$

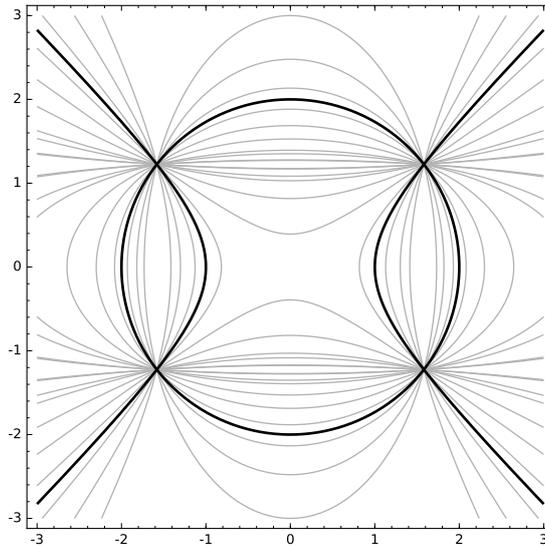


FIGURE 7.4 – Exemple de fibration avec $d = 2$. (Produit avec *SageMath*.)

Et il convient ensuite d'éclater \mathbf{CP}^2 en \tilde{E} . On obtient alors $\Phi: \mathbf{CP}^2 \# d^2 \overline{\mathbf{CP}^2} \rightarrow \mathbf{CP}^1$, qui est bien une fibration et où la fibre générique est une courbe algébrique de degré d , donc de genre $(d - 1)(d - 2)/2$ (voir l'annexe (C, p. 29)).

Une conséquence de cette construction générale est la suivante.

THÉORÈME 1

La surface $\mathbf{CP}^2 \# d^2 \overline{\mathbf{CP}^2}$ admet une fibration (singulière) $\mathbf{CP}^2 \# d^2 \overline{\mathbf{CP}^2} \rightarrow \mathbf{CP}^1$, dont la fibre générique est une courbe algébrique de genre $(d - 1)(d - 2)/2$.

1.2 La surface $E(1)$

La surface complexe obtenue pour $d = 3$, c'est-à-dire $\mathbf{CP}^2 \# 9 \overline{\mathbf{CP}^2}$, est la surface désignée par $E(1)$. C'est une surface elliptique puisque $d = 3$.

À partir de cette description, on peut aisément calculer les principaux invariants topologiques de $E(1)$. Ils sont regroupés dans ce qui suit et leur calcul découle des propriétés de la somme connexe et du théorème de la signature.

§3. C'est l'ensemble d'indétermination de $Q \mapsto [p_1(Q) : p_0(Q)]$.

PROPOSITION 2

La surface $E(1)$ est simplement connexe et sa caractéristique d'EULER-POINCARÉ est 12. De plus, $b_2(E(1)) = 10$, $c_1(E(1))^2 = 0$ et $\sigma(E(1)) = -8$.

PREUVE

Par somme connexe, $E(1)$ est bien simplement connexe. Sa caractéristique d'EULER-POINCARÉ se calcule aussi comme suit :

$$\chi(E(1)) = \chi(\mathbf{CP}^2) + 9\chi(\mathbf{CP}^2) - 2 \times 9 = 3 + 27 - 18 = 12.$$

Par simple connexité, $b_2(E(1)) = \chi(E(1)) - b_0(E(1)) - b_4(E(1)) = 12 - 2 = 10$.

Aussi, $c_2(E(1))$ est déterminée par $\langle c_2(E(1)), [E(1)] \rangle = \chi(E(1))$. Par somme connexe, la signature est égale à $\sigma(E(1)) = \sigma(\mathbf{CP}^2) - 9\sigma(\mathbf{CP}^2) = -8$.

Par le théorème de la signature et le fait que $p_1(E(1)) = c_1(E(1))^2 - 2c_2(E(1))$, on a :

$$\langle c_1(E(1))^2, [E(1)] \rangle = 3\sigma(E(1)) + 2\langle c_2(E(1)), [E(1)] \rangle = -24 + 24 = 0.$$

Comme $H^4(E(1); \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, on obtient $c_1(E(1))^2 = 0$. ■

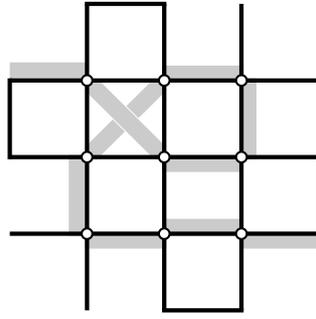


FIGURE 7.5 – Représentation de $E(1)$.

Calculons explicitement la cohomologie de $E(1)$ et sa forme d'intersection.

Tout d'abord, puisque $E(1) = \mathbf{CP}^2 \# 9\overline{\mathbf{CP}^2}$, on peut donner une base naturelle de $E(1)$ selon cette décomposition. On la désigne par (h, e_1, \dots, e_9) et elle vérifie :

$$h \cdot h = 1, \quad h \cdot e_i = 0 \quad \text{et} \quad e_i \cdot e_j = -\delta_{ij},$$

où l'on a désigné par \cdot la forme d'intersection géométrique et par δ le symbole de KRONECKER.

Une base plus intéressante est la suivante :

$$\left(f = 3h - \sum_{i=1}^9 e_i, e_9, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_7 - e_8, -h + e_6 + e_7 + e_8 \right).$$

On peut alors vérifier que selon cette base, la forme d'intersection de $E(1)$ s'écrit

$$Q_{E(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \oplus (-E_8),$$

là où pour la première on avait $[1] \oplus 9[-1]$.

Cette décomposition suggère que l'on peut géométriquement décomposer $E(1)$ de sorte à obtenir un recollement de \mathcal{M}_{E_8} avec une autre variété topologique. Cela est proposé dans [GS99] et on va retracer cette construction.

On commence tout d'abord par considérer un voisinage $N(1)$ d'une fibre cusp de $E(1)$ et de la neuvième sphère exceptionnelle (qui vient du neuvième $\overline{\mathbf{CP}^2}$). L'existence d'une

telle fibre peut toujours être supposée (voir [GS99, ch. 7]), quitte à changer de fibration elliptique. Ce voisinage donne une variété compacte à bord plongée dans $E(1)$.

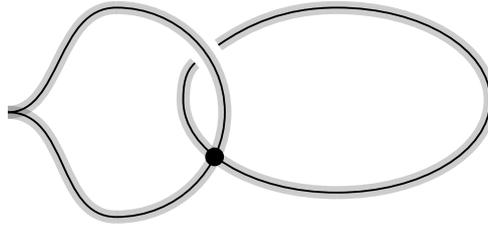


FIGURE 7.6 – Un voisinage d’une fibre cusp et d’une sphère exceptionnelle.

Pour rappel, une telle fibre cusp est topologiquement une courbe singulière donnée par l’équation $x^3 = zy^2$. Elle est homotopiquement équivalente la sphère S^2 .

De sorte que $H_2(N(1); \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et la forme d’intersection de $N(1)$ est donnée par

$$Q_{N(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puisque cette matrice est unimodulaire, on sait (par la proposition (4, p. 61)) que $\partial N(1)$ est une sphère homologique, c’est-à-dire $H^*(\partial N(1); \mathbf{Z}) = H^*(S^3; \mathbf{Z})$ (et d’après le théorème de POINCARÉ-PERELMAN, on a même un homéomorphisme).

Ainsi, le complémentaire, $\Phi(1) = E(1) - N(1)$, est une variété lisse à bord, dont le bord est encore une sphère d’homologie. Aussi, $Q_{\Phi(1)} = -E_8$. Mais puisque $\Phi(1)$ n’est pas fermée, cela ne rentre pas en contradiction avec le théorème de ROKHLINE.

Concluons par le fait que, dans [GS99, ch. 7], il est montré que $\Phi(1)$ peut être obtenue comme plombage suivant le diagramme correspondant à la matrice $-E_8$ (à comparer avec l’annexe (A, p. 26)).

1.3 Les surfaces $E(n)$

À partir de la surface $E(1)$, on peut construire d’autres nouvelles surfaces. Cela se fait en recollant diverses copies de $E(1)$ en évitant les fibres singulières.

Commençons par choisir une fibre, F , de $E(1)$ qui soit un tore lisse et telle qu’il existe un disque trivialisant $D \subset \mathbf{C}P^1$, c’est-à-dire tel que $E(1)|_D \simeq T^2 \times D$.

En retirant l’intérieur de $E(1)|_D$, on obtient une surface dont le bord est $T^2 \times S^1$. On peut le recoller avec un semblable en réitérant cette opération sur une autre copie de $E(1)$. On obtient une surface, appelée $E(2)$, qui donne aussi une fibration de fibre générique T^2 .

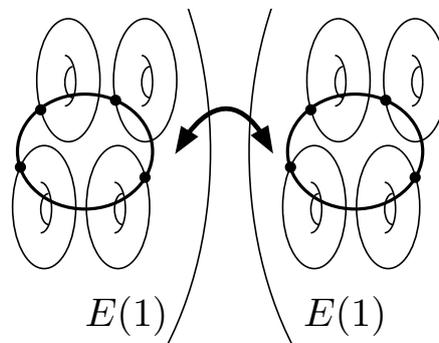


FIGURE 7.7 – Recollement suivant un voisinage sans singularité.

On procède de même avec $E(2)$ et une autre copie de $E(1)$. Puisque les fibres singulières sont rares, cette construction est toujours possible. Cela donne la séquence des $E(n)$ pour $n \geq 1$ entier.

On peut calculer les principaux invariants topologiques de $E(n)$ en se servant du théorème de VAN KAMPEN et des propriétés de la caractéristique d'EULER-POINCARÉ selon les sommes connexes (voir [GS99] pour les détails). Les résultats de ces calculs sont rassemblés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3

Les surfaces $E(n)$ sont simplement connexes. On a $\chi(E(n)) = 12n$ et donc $b_2(E(n)) = 12n - 2$. Aussi,

$$\sigma(E(n)) = -8n$$

et donc $b_2^+(E(n)) = 2n - 1$ et $c_1^2(E(n)) = 0$.

Nous garderons en mémoire la surface $E(2)$. Bien que nous n'aurons pas les outils pour le montrer, la surface $E(2)$, qui est un exemple de surface $K3$ (nous en parlerons au chapitre suivant), est homéomorphe à la surface S_4 qui sera présentée (voir [GS99] ou [Sco05] pour la classification des surfaces $K3$).

2 PINCEAU DE CUBIQUES DE HESSE

À présent, on va donner un exemple explicite de surface $E(1)$. Pour ce faire, on va préciser les deux polynômes que nous allons choisir pour constituer le pinceau. Les polynômes sont

$$xyz \text{ et } x^3 + y^3 + z^3,$$

ainsi, le pinceau de HESSE est décrit par les équations

$$\lambda xyz + \mu(x^3 + y^3 + z^3) = 0,$$

où $[\lambda : \mu] \in \mathbf{CP}^1$, $[x : y : z] \in \mathbf{CP}^2$. Après éclatement des zéros communs, cette surface est la surface elliptique $E(1)$.

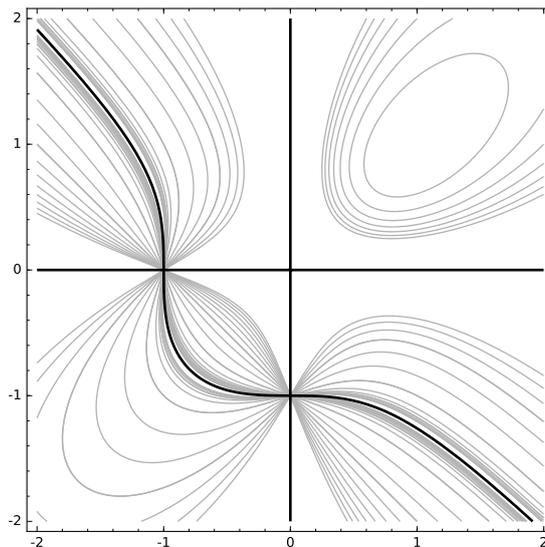


FIGURE 7.8 – Illustration du pinceau de cubiques HESSE dans la carte $z = 1$ et pour x, y réels. (Produit avec *SageMath*.)

Notre but va être de calculer le lieu des fibres singulières et la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de ces fibres. Puisque $\chi(E(1)) = 12$, la somme de ces caractéristiques devrait également être 12 puisqu'une fibre générique est de caractéristique nulle.

En effet, ôtons à $E(1)$ des ouverts U_1, \dots, U_k voisinages de chaque fibre singulière de sorte que chacun de ces ouverts se rétracte par déformation sur sa fibre singulière. La surface obtenue est fibré par des tores et a donc une caractéristique d'EULER-POINCARÉ nulle. Mais alors la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de $E(1)$ est la somme des caractéristiques des U_i , qui a chacune la caractéristique de sa fibre singulière.

La première étape va donc être de calculer le lieu des fibres singulières. Pour $[\lambda : \mu]$ fixé, posons

$$F(x, y, z) = \lambda xyz + \mu(x^3 + y^3 + z^3).$$

Bien-sûr, la fibre au-dessus de $[\lambda : \mu]$ est alors donnée par l'équation $F = 0$.

On remarque que F est une submersion presque partout, en effet :

$$dF = \begin{pmatrix} \lambda yz + 3\mu x^2 & \lambda xz + 3\mu y^2 & \lambda xy + 3\mu z^2 \end{pmatrix},$$

et cette différentielle est nulle exactement lorsque $[\lambda : \mu]$ est le pied d'une fibre singulière.

PROPOSITION 1

Le lieu des fibres singulières est :

$$[\lambda : \mu] \in \{[1 : 0], [1 : -1/3], [j : -1/3], [j^2 : -1/3]\}.$$

PREUVE

Supposons que $[\lambda : \mu]$ est le pied d'une fibre singulière et que $[x : y : z]$ est une singularité au-dessus de ce pied. On constate que :

- si $\lambda = 0$, alors

$$dF = 3\mu \begin{pmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

et alors $\mu = 0$ ou $[x : y : z] = 0$, mais cela n'arrive jamais ;

- si $\mu = 0$, alors

$$dF = \lambda \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

et alors $\lambda = 0$ (ce qui n'est pas possible) ou alors

$$[x : y : z] \in \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$$

ce qui est bien le lieu de trois singularités.

Supposons maintenant de plus que λ et μ soient tous deux non nuls. Supposons que l'un des x, y, z est nul, par exemple $x = 0$, alors

$$dF = \begin{pmatrix} \lambda yz & 3\mu y^2 & 3\mu z^2 \end{pmatrix}$$

et donc y, z sont aussi tous deux nuls. On peut donc supposer x, y, z tous trois non nuls. Il est utile ici (puisque $\lambda, \mu \neq 0$) de supposer $\mu = -1/3$. L'hypothèse $dF = 0$ implique :

$$\begin{cases} \lambda yz = -3\mu x^2 = x^2 \\ \lambda xz = -3\mu y^2 = y^2 \\ \lambda xy = -3\mu z^2 = z^2 \end{cases} \implies \lambda^3 x^2 y^2 z^2 = x^2 y^2 z^2 \implies \lambda^3 = 1$$

on en déduit :

$$[\lambda : \mu] \in \{[1 : -1/3], [j : -1/3], [j^2 : -1/3]\}.$$

On vérifie sans peine que ce sont bien des lieux de fibres singulières. (L'argument sera de toute façon donné dans ce qui suit.) ■

Maintenant que nous connaissons le lieu des fibres singulières, nous pouvons faire le calcul de la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de chacune d'entre-elles.

PROPOSITION 2

Chacune des fibres singulières est de caractéristique d'EULER-POINCARÉ 3.

PREUVE

Commençons par la fibre $[\lambda : \mu] = [1 : 0]$. L'équation correspondante est :

$$xyz = 0.$$

C'est l'union de trois droites projectives en position générale. C'est topologiquement trois sphères dont chacune intersecte les deux autres en deux points. À type d'homotopie près, on peut se ramener à trois sphères où sur chacune on choisit un point sur lequel on recolle un segment recollé à un autre point d'une autre sphère. De sorte que l'on a un complexe cellulaire constitué de trois points, trois segments et trois disques. La caractéristique d'EULER-POINCARÉ d'un tel complexe cellulaire égale trois.

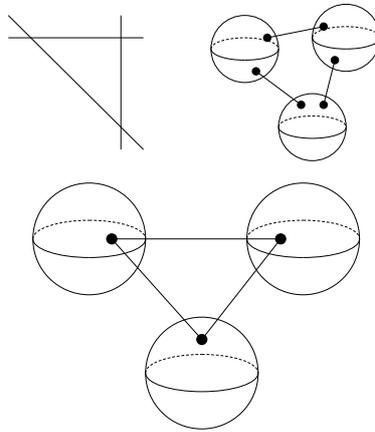


FIGURE 7.9 – Manipulation topologique pour obtenir un CW-complexe.

Montrons maintenant que les trois autres fibres singulières au-dessus de :

$$[\lambda : \mu] \in \{[1 : -1/3], [j : -1/3], [j^2 : -1/3]\}$$

sont de la même forme. Tout d'abord, on remarque que le changement de variable $x \mapsto jx$ fournit un automorphisme polynomial entre les équations de ces trois fibres singulières. Ces trois fibres singulières sont donc identiques. On considère le cas $[\lambda : \mu] = [-3 : 1]$. Cela fournit l'équation :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

et la factorisation :

$$(x + y + z)(x + jy + j^2z)(x + j^2y + jz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

montre que l'on a bien la réunion de trois droites projectives en position générale.

Par le même argument, on obtient encore une fois une caractéristique d'EULER-POINCARÉ égale à trois. Ce qui conclut. ■

Chapitre 8

Surface(s) $K3$

Il y a une classe de surfaces complexes qui sont remarquables, ce sont les surfaces $K3$ §1. Une surface algébrique complexe est dite $K3$ si elle est non singulière, simplement connexe et de première classe de CHERN nulle.

D'un point de vue topologique, toutes les surfaces $K3$ sont difféomorphes (voir [GS99, p. 88]). Nous nous intéressons ici à la topologie de ces surfaces : les calculs des invariants topologiques qui suivent sont donc valables pour toutes les surfaces $K3$. On parlera dorénavant de *la* surface $K3$ en ignorant les différentes structures complexes possibles. §2

Le principal intérêt topologique à l'étude de cette surface est qu'elle fournit un exemple de surface simplement connexe qui ne soit ni S^4 , ni une somme connexe de copies de \mathbf{CP}^2 ou de $\overline{\mathbf{CP}^2}$.

Au chapitre précédent nous avons construit un tel exemple de surface $K3$, il s'agissait de la surface $E(2)$. Cependant, sa construction rend sa géométrie et sa topologie difficilement lisible. C'est pour cela que nous allons établir une nouvelle surface $K3$ qui sera elle plus facile à appréhender.

L'exemple particulier de surface $K3$ que nous allons étudier ici sera la surface appelée S_4 . Notre but va être tout d'abord de calculer ses principaux invariants topologiques, pour nous assurer qu'il s'agit bien d'une surface $K3$. Nous verrons aussi comment mettre une structure de surface elliptique sur S_4 . §3 Enfin, nous ferons un calcul explicite des fibres singulières selon une structure de surface elliptique que nous aurons choisie explicitement.

1 LA SURFACE S_4

Par la suite, on se place dans \mathbf{CP}^3 , muni des coordonnées homogènes $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$. On définit S_4 comme étant la surface projective complexe définie par l'équation :

$$z_0^4 - z_1^4 + z_2^4 - z_3^4 = 0.$$

On commence par remarquer que S_4 est bien une surface complexe. Elle est aussi simplement connexe d'après le théorème de l'hyperplan de LEFSCHETZ (5, p. 54) puisque non singulière.

Commençons cette étude topologique par le calcul de la classe de CHERN de S_4 . En annexe (B, p. 28), nous avons déjà montré que si X est une hypersurface de degré d dans \mathbf{CP}^n , alors

$$K_X = -c_1(X) = (d - n - 1)x,$$

§1. Le nom $K3$ a été donné par A. WEIL : « [Ces surfaces sont] ainsi nommées en l'honneur de KUMMER, KÄHLER, KODAIRA, et de la belle montagne $K2$ au Cachemire ».

§2. Il y a une infinité de surfaces $K3$ non isomorphes au regard de la structure complexe.

§3. Bien que ça soit automatique avec l'exemple $E(2)$, nous prenons maintenant le parti de partir d'une surface facilement descriptible mais dont une structure elliptique est moins évidente à expliciter.

où x désigne la restriction de g (le générateur privilégié de $H^2(\mathbf{C}P^n; \mathbf{Z})$) à $H^2(X; \mathbf{Z})$. Ainsi,

$$c_1(S_4) = (4 - 3 - 1)x = 0.$$

On en déduit que S_4 fournit bien un exemple de surface $K3$ puisqu'elle est non singulière, simplement connexe et de première classe de CHERN nulle.

La décomposition $\tau_{\mathbf{C}P^3}|_{S_4} = \tau_{S_4} \oplus \nu_{S_4}$ montre que :

$$c(S_4) = c(\mathbf{C}P^3)|_{S_4} c(\nu_{S_4})^{-1}.$$

On développe cette égalité (en remarquant que ν_{S_4} est un fibré en droite) :

$$1 + c_1(S_4) + c_2(S_4) = (1 + 4x + 6x^2)(1 - c_1(\nu_X) + c_1^2(\nu_X))$$

et comme $c_1(S_4) = 0$, on doit avoir $4x - c_1(\nu_X) = 0$ et donc $c_1(\nu_X) = 4x$. Finalement :

$$1 + c_2(S_4) = (1 + 4x + 6x^2)(1 - 4x + 16x^2) = 1 + (6 - 16 + 16)x^2.$$

On en conclut que la classe de CHERN de S_4 est donnée par

$$c(S_4) = 1 + 6x^2.$$

Calculons maintenant la signature, σ_{S_4} , et le rang de la forme d'intersection, Q_{S_4} , de la surface S_4 .

Par le théorème de la signature :

$$\begin{aligned} \sigma(S_4) &= \left\langle \frac{1}{3}p_1, [S_4] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2), [S_4] \right\rangle \\ &= -4\langle x^2, [S_4] \rangle. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de calculer la quantité $\langle x^2, [S_4] \rangle$. Pour ce, on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} \langle x^2, [S_4] \rangle &= \langle g^2|_{S_4}, [S_4] \rangle \\ &= \langle g^2, i_*[S_4] \rangle \\ &= \langle g^2 \cup \text{PD}(i_*[S_4]), [\mathbf{C}P^3] \rangle \\ &= \langle g^2 \cup 4g, [\mathbf{C}P^3] \rangle \\ &= 4. \end{aligned}$$

Finalement, la signature et le rang de Q_{S_4} sont :

$$\sigma(S_4) = -16 \text{ et } \text{rg } Q_{S_4} = 22.$$

En effet, pour le rang, on utilise le fait que S_4 est simplement connexe. La caractéristique d'EULER-POINCARÉ de S_4 étant $24 = \langle c_2, [S_4] \rangle$, on en déduit que $\text{rg } Q_{S_4} = 24 - 2 = 22$.

Les groupes d'homologie de S_4 peuvent aussi être décrits. Comme S_4 est une surface complexe compacte non singulière :

$$H_0(S_4; \mathbf{Z}) \simeq H_4(S_4; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z} \text{ et } H_1(S_4; \mathbf{Z}) \simeq H_3(S_4; \mathbf{Z}) \simeq 0.$$

Il reste le deuxième groupe d'homologie, dont le rang est 22 :

$$H_2(S_4; \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^{22}.$$

Pour finir sa description, il convient de décrire sa forme d'intersection.

Puisque $c_1(S_4) = 0$, on a aussi $w_2(S_4) = 0$ et donc Q_{S_4} est paire (voir (1, p. 60)). Ainsi, d'après la classification des formes quadratiques non définies, non dégénérées et paires :

$$Q_{S_4} = \bigoplus \pm n E_8 \bigoplus m H.$$

Puisque $\sigma(E_8) = 8$ et $\sigma(H) = 0$ il vient $n = -2$. Et comme $b_2(S_4) = 22$ on en déduit $m = 3$. Finalement,

$$Q_{S_4} = -2E_8 \oplus 3H.$$

C'est donc bien un premier exemple de surface qui ne soit ni S^4 , ni une somme de $\mathbf{C}P^2$ ou de $\overline{\mathbf{C}P^2}$.

2 STRUCTURE DE SURFACE ELLIPTIQUE

Le but est de dégager une fibration elliptique $S_4 \rightarrow \mathbf{C}P^1$. La construction est tirée de [GS99, p. 77].

On considère les droites projectives incluses dans S_4 :

$$L_1 := \{z_0 = z_1 \text{ et } z_2 = z_3\} \text{ et } L_2 := \{z_0 = -z_1 \text{ et } z_2 = -z_3\}.$$

En termes linéaires (i.e. dans \mathbf{C}^4), L_1 et L_2 définissent deux plans orthogonaux. Il n'y a donc pas d'hyperplan contenant simultanément L_1 et L_2 . Aussi, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ dans $\mathbf{C}P^3$.

On va maintenant définir notre fibration

$$\pi : S_4 \rightarrow L_2 \simeq \mathbf{C}P^1.$$

Si $P \in S_4$, alors on définit $\pi(P)$ comme étant :

- si $P \notin L_1$, alors, pour H_P l'unique plan projectif engendré par L_1 et P , on pose $\pi(P) = H_P \cap L_2$;
- si $P \in L_1$, alors, pour H_P le plan tangent à S_4 en P , on pose $\pi(P) = H_P \cap L_2$.

Pour vérifier qu'il s'agit d'une fibration elliptique, il faut montrer que la fibre d'un point générique est une courbe elliptique et que π est lisse. Pour cela, on va calculer explicitement les équations des fibres. La régularité ne sera pas explicitement discutée, mais elle sera suffisamment claire.

Soit $Q \in L_2$ générique. Si $H_Q \simeq \mathbf{C}P^2$ est le plan projectif engendré par Q et L_1 , alors

$$\pi^{-1}(Q) = ((H_Q \cap S_4) - L_1) \cup \{P \in L_1 \mid T_P S_4 \cap L_2 = Q\}.$$

Première étape. Si $Q \in L_2$ alors $Q = [y : -y : x : -x]$, et il vient

$$H_Q = \{x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3)\}$$

et donc

$$H_Q \cap S_4 = \left\{ z_0^4 - z_1^4 + z_2^4 - z_3^4 = 0 \text{ et } x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3) \right\}$$

Mais cette intersection contient entièrement L_1 (puisque L_1 est contenue dans S_4 et dans H_Q).

On va décomposer $H_Q \cap S_4$ autrement pour pouvoir en extraire la partie disjointe de L_1 .

Dans H_Q , on a l'équation

$$x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3) =: h(z)$$

et l'équation de S_4 se factorise comme suit :

$$S_4 : (z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2)(z_0 - z_1) + (z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2)(z_2 - z_3) = 0 .$$

Vient l'hypothèse Q générique, nous permettant de supposer x et y tous deux non nuls. Il vient alors

$$S_4 : xy \left[(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2)(z_0 - z_1) + (z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2)(z_2 - z_3) \right] = 0$$

ce qui donne

$$S_4 : h(z) \left[y(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2) + x(z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2) \right] = 0.$$

Maintenant, comme $h(z) = 0$ si, et seulement si, $z \in L_1$ (puisque $x, y \neq 0$) il vient

$$H_Q \cap S_4 - L_1 \subset \begin{cases} x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3) \\ y(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2) + x(z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2) = 0. \end{cases}$$

Comme nous sommes dans un cadre projectif, cette inclusion n'est pas une égalité puisque L_1 intersecte l'objet géométrique à droite.

Seconde étape. Il reste à examiner l'ensemble des $P \in L_1 \subset S_4$ tels que $\mathbb{T}_P S_4 \cap L_2 = Q$. Si $P = [u : u : v : v] \in L_1$, alors l'espace tangent en P de S_4 est donné par l'équation :

$$d(z_0^4 - z_1^4 + z_2^4 - z_3^4)(P) = 0.$$

Le calcul

$$\begin{aligned} d(z_0^4 - z_1^4) &= 4z_0^3 dz_0 - 4z_1^3 dz_1 \\ d(z_0^4 - z_1^4)(u, u) &= 4u^3(z_0 - z_1) \end{aligned}$$

montre que

$$\mathbb{T}_P S_4 : u^3(z_0 - z_1) + v^3(z_2 - z_3) = 0.$$

Et donc $\mathbb{T}_P S_4$ intersecte L_2 en $Q = [y : -y : x : -x]$ si, et seulement si,

$$u^3 y + v^3 x = 0.$$

Mais alors $P \in L_1 \subset S_4$ satisfait en fait

$$y(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2) + x(z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2) = 0.$$

En effet, l'équation du tangent est équivalente à $4u^3 y + 4v^3 x = 0$, et si $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [u : u : v : v]$ alors on a

$$\begin{aligned} z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2 &= u^3 + u^3 + u^3 + u^3 \\ z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2 &= v^3 + v^3 + v^3 + v^3. \end{aligned}$$

Aussi, un tel P vérifie bien sûr $x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3)$.

On en conclut que pour $Q = [y : -y : x : -x]$ générique (en fait, avec $x, y \neq 0$) on a

$$\pi^{-1}(Q) = \begin{cases} x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3) \\ y(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2) + x(z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2) = 0. \end{cases}$$

Dans le plan $H_Q : x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3)$, c'est une équation cubique et donc une courbe elliptique. Elle est lisse pour Q générique.

3 CALCUL DES FIBRES SINGULIÈRES

À partir de la structure de fibration elliptique donnée précédemment, nous allons calculer explicitement ses fibres singulières.

Il y a plusieurs raisons pour lesquelles il doit y avoir de telles fibres. Celle à garder en vue est que s'il n'y en avait pas alors la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de S_4 serait nulle puisque la caractéristique d'un tore est nulle. Mieux : en choisissant des voisinages ouverts des fibres singulières dans S_4 se rétractant par déformation sur elles, il vient que $\chi(S_4) = 24$ est aussi la somme des caractéristiques de ces fibres.

On désigne par $[x : y] \in \mathbf{CP}^1$ le pied d'une fibre. Le calcul des fibres singulières se fait en distinguant les trois cas $x = 0, y = 0$ et x, y tous deux non nuls.

3.1 Lorsque $x = 0$ ou $y = 0$

En traitant le cas $y = 0$, on aura de façon parfaitement similaire traité le cas $x = 0$. On prend donc $Q = [0 : 0 : 1 : -1]$. On obtient comme fibre au-dessus de Q :

$$F_Q : \begin{cases} z_0 = z_1 \\ z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2 = 0 \end{cases}$$

et comme

$$z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2 = (z_2 + z_3)(z_2 + iz_3)(z_2 - iz_3)$$

on obtient une fibre singulière qui est constituée de trois droites qui s'intersectent en un unique point. Topologiquement, c'est le bouquet de trois sphères, donc de caractéristique d'EULER-POINCARÉ égale à 4.

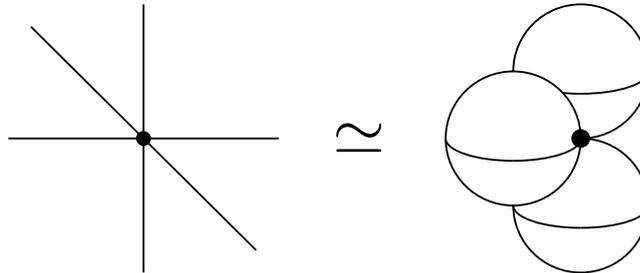


FIGURE 8.1 – La topologie de la fibre singulière lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.

3.2 Lorsque $x \neq 0$ et $y \neq 0$

La fibre en $[y : -y : x : -x] \in \mathbf{CP}^1$ avec $x, y \neq 0$ est donnée par :

$$F : \begin{cases} x(z_0 - z_1) - y(z_2 - z_3) = 0, \\ y(z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2) + x(z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2) = 0. \end{cases}$$

Notons :

$$\begin{aligned} P_{01} &:= z_0^3 + z_1^3 + z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2, \\ P_{23} &:= z_2^3 + z_3^3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2. \end{aligned}$$

La différentielle de F en $[y : -y : x : -x]$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x & -x & -y & y \\ y(3z_0^2 + z_1^2 + 2z_0 z_1) & y(3z_1^2 + z_0^2 + 2z_0 z_1) & x(3z_2^2 + z_3^2 + 2z_2 z_3) & x(3z_3^2 + z_2^2 + 2z_2 z_3) \end{pmatrix}$$

ce que l'on réécrit

$$\begin{pmatrix} x & -x & -y & y \\ yP_{01,0} & yP_{01,1} & xP_{23,2} & xP_{23,3} \end{pmatrix}.$$

Le lieu des fibres singulières sont les points $[y : -y : x : -x]$ où cette différentielle n'est pas de rang 2.

LEMME 1

Si la fibre F est singulière en $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in F$ alors

$$\begin{cases} P_{01,0} + P_{01,1} = 0 \\ P_{23,2} + P_{23,3} = 0. \end{cases}$$

PREUVE

Le premier mineur de dF donne $xyP_{01,1} + xyP_{01,1} = 0$. On procède de même pour $P_{23,2}$ et $P_{23,3}$. ■

Par la suite, on supposera que $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ est un point singulier d'une fibre singulière qui est au-dessus de $[y : -y : x : -x]$.

LEMME 2

Un tel point singulier a toutes ses coordonnées non nulles.

PREUVE

Supposons par exemple $z_0 = 0$. Alors $z_1 = 0$ puisqu'on obtient de $P_{01,0}$ et $P_{01,1}$ l'équation $z_1^2 = 3z_1^2$. Donc le facteur multiplicatif entre les deux lignes est 0. De sorte que l'on doit avoir $P_{23,2} = 0$ et $P_{23,3} = 0$. Mais ces deux équations sont incompatibles à moins que $z_2 = z_3 = 0$. Mais alors toutes les coordonnées sont nulles, ce qui est impossible dans \mathbf{CP}^3 . ■

LEMME 3

Les singularités sont sur les droites :

$$\begin{cases} z_0/z_1 = j \text{ ou } j^2 \\ z_2/z_3 = j \text{ ou } j^2. \end{cases}$$

PREUVE

Ce sont les équations $P_{01,0} + P_{01,1} = 0$ et $P_{23,2} + P_{23,3} = 0$ qui l'assurent. ■

En d'autres termes, la singularité s'écrit :

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \left\{ \begin{array}{l} [jz_1 : z_1 : jz_3 : z_3] \\ [j^2z_1 : z_1 : jz_3 : z_3] \\ [jz_1 : z_1 : j^2z_3 : z_3] \\ [j^2z_1 : z_1 : j^2z_3 : z_3] \end{array} \right\}$$

LEMME 4

Les *possibles* singularités sont des formes suivantes :

- $[j : 1 : j\xi^n \exp(i\pi/4) : \xi^n \exp(i\pi/4)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j : 1 : j^2\xi^n \exp(i\pi/6) : \xi^n \exp(i\pi/6)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j^2 : 1 : j\xi^n \exp(i\pi/3) : \xi^n \exp(i\pi/3)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j^2 : 1 : j^2\xi^n \exp(i\pi/4) : \xi^n \exp(i\pi/4)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;

avec ξ une racine primitive 4-ème de l'unité (par exemple $\xi = i$).

PREUVE

D'après le deuxième lemme, on a $z_1 \neq 0$ et donc on prend $z_1 = 1$ et $z = z_3$, de sorte

que

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [j^m : 1 : j^n z : z],$$

pour $m, n \in \{1, 2\}$. L'équation de S_4 donne :

$$j^{4m} - 1 + j^{4n} z^4 - z^4 = j^m - 1 + j^n z^4 - z^4 = 0$$

et donc on en déduit

$$z^4 = \frac{1 - j^m}{j^n - 1}.$$

Les calculs explicites concluent. ■

LEMME 5

Le pied de $[j^m : 1 : j^n z : z]$, qui est dans S_4 le point $[y : -y : x : -x]$, vérifie

$$[x : y] = \left[z \frac{j^n - 1}{j^m - 1} : 1 \right]$$

PREUVE

Le pied doit vérifier l'équation

$$x(z_0 - z_1) = y(z_2 - z_3).$$

On peut supposer $y = 1$, de sorte que

$$x = \frac{z_2 - z_3}{z_0 - z_1} = z \frac{j^n - 1}{j^m - 1}.$$

Il nous reste à examiner les candidats donnés précédemment. ■

THÉORÈME 6

Il y a 16 singularités, et elles sont :

- $[j : 1 : j i^n \exp(i\pi/4) : i^n \exp(i\pi/4)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j^2 : 1 : j^2 i^n \exp(i\pi/4) : i^n \exp(i\pi/4)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j : 1 : j^2 i^n \exp(i\pi/6) : i^n \exp(i\pi/6)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$;
- $[j^2 : 1 : j i^n \exp(i\pi/3) : i^n \exp(i\pi/3)]$, $n \in \mathbf{Z}_4$.

PREUVE

Comme précédemment, on considère $[j^m : 1 : j^n z : z]$, où $m, n \in \{1, 2\}$ et de sorte que

$$z^4 = \frac{1 - j^m}{j^n - 1}.$$

D'après le lemme précédent, le pied de ce point est

$$[x : y] = \left[z \frac{j^n - 1}{j^m - 1} : 1 \right].$$

Si on évalue la différentielle de F , on trouve :

$$\begin{pmatrix} z \frac{j^n - 1}{j^m - 1} & -z \frac{j^n - 1}{j^m - 1} & -1 & 1 \\ 3j^{2m} + 1 + 2j^m & 3 + j^{2m} + 2j^m & z^3 \frac{j^n - 1}{j^m - 1} (3j^{2n} + 1 + 2j^n) & z^3 \frac{j^n - 1}{j^m - 1} (3 + j^{2n} + 2j^n) \end{pmatrix}$$

On constate que :

$$z \left(z^3 \frac{j^n - 1}{j^m - 1} \right) = \frac{1 - j^m}{j^n - 1} \frac{j^n - 1}{j^m - 1} = -1$$

de sorte que

$$z^3 \frac{j^n - 1}{j^m - 1} = -\frac{1}{z}.$$

On remarque aussi que

$$3j^{2m} + 1 + 2j^m = -(3 + j^{2m} + 2j^m).$$

On réécrit ainsi la différentielle et en multipliant la première ligne par $1/z$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -\frac{j^n - 1}{1 - j^m} & \frac{j^n - 1}{1 - j^m} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ 3j^{2m} + 1 + 2j^m & -(3j^{2m} + 1 + 2j^m) & -\frac{1}{z}(3j^{2n} + 1 + 2j^n) & \frac{1}{z}(3j^{2n} + 1 + 2j^n) \end{pmatrix}$$

Maintenant, on a aussi que

$$(3j^{2m} + 1 + 2j^m)(1 - j^m) = -3, (3j^{2n} + 1 + 2j^n)(j^n - 1) = 3$$

et il vient donc

$$\begin{pmatrix} -\frac{j^n - 1}{1 - j^m} & \frac{j^n - 1}{1 - j^m} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ -\frac{3}{1 - j^m} & \frac{3}{1 - j^m} & -\frac{1}{z} \frac{3}{j^n - 1} & \frac{1}{z} \frac{3}{j^n - 1} \end{pmatrix}$$

Il nous reste à multiplier la dernière ligne par $(j^n - 1)/3$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{j^n - 1}{1 - j^m} & \frac{j^n - 1}{1 - j^m} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{z} \\ -\frac{j^n - 1}{1 - j^m} & \frac{j^n - 1}{1 - j^m} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

et cette matrice est bien de rang 1, donc le point considéré est bien une singularité. ■

LEMME 7

Pour n choisi les deux singularités

$$[j : 1 : j \mathbf{i}^n \exp(\mathbf{i}\pi/4) : \mathbf{i}^n \exp(\mathbf{i}\pi/4)] \text{ et } [j^2 : 1 : j^2 \mathbf{i}^n \exp(\mathbf{i}\pi/4) : \mathbf{i}^n \exp(\mathbf{i}\pi/4)]$$

sont sur un même pied.

PREUVE

C'est une conséquence du lemme précédent. ■

La caractéristique d'EULER-POINCARÉ d'une telle fibre singulière est 2 (c'est un tore pincé en deux points). Les huit autres fibres singulières ont une caractéristique égale à 1.

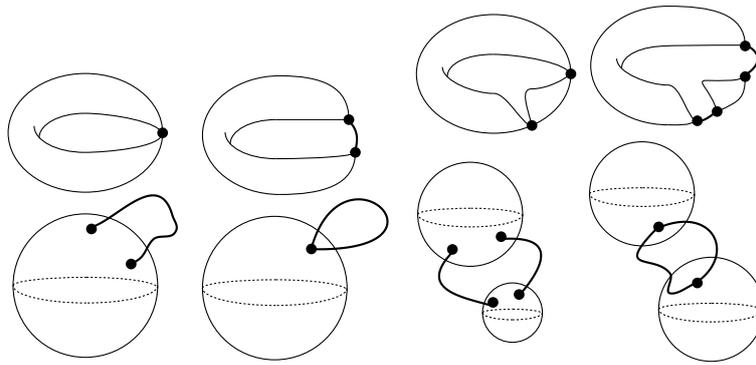


FIGURE 8.2 – Caractéristiques des fibres singulières.

Finalement, on obtient bien $2 \times 4 + 4 \times 2 + 8 \times 1 = 24$, qui est la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de S_4 . Cela conclut cette étude.

Troisième partie

Outro

Bibliographie

- [AD14] M. AUDIN et M. DAMIAN. *Morse Theory and Floer Homology*. Springer, 2014.
- [Bre93] G.E. BREDON. *Topology and Geometry*. Springer, 1993.
- [BT82] R. BOTT et L.W. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer, 1982.
- [Die89] J. DIEUDONNÉ. *A History of Algebraic and Differential Topology*. Birkhäuser, 1989.
- [GH78] P. GRIFFITHS et J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience, 1978.
- [GS99] R.E. GOMPF et A.I. STIPSICZ. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. American Mathematical Society, 1999.
- [Hat01] A. HATCHER. *Algebraic Topology*. Allen Hatcher, 2001.
- [Hat09] A. HATCHER. *Vector Bundles and K-Theory*. Allen Hatcher, 2009.
- [Hir53] F. HIRZEBRUCH. “On Steenrod’s Reduced Powers, The Index Of Interia, And The Todd Genus”. In : *Proc. Nat. Acad. Sci.* 39 (1953), p. 951–956.
- [Hir66] F. HIRZEBRUCH. *Topological Methods in Algebraic Geometry*. Springer, 1966.
- [Kir89] R.C. KIRBY. *The Topology of 4-Manifolds*. Springer, 1989.
- [May] J.P. MAY. *A Concise Course in Algebraic Topology*.
- [Mil65] J.W. MILNOR. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, 1965.
- [Mil73] J.W. MILNOR. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1973.
- [MS74] J.W. MILNOR et J.D STASHEFF. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.
- [Sco05] A. SCORPAN. *The Wild World of 4-Manifolds*. American Mathematical Society, 2005.
- [Ser70] J.-P. SERRE. *Cours d’arithmétique*. Presses Universitaires de France, 1970.
- [Sha10] I.R. SHAFAREVICH. *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer, 2010.
- [Spa66] E.H. SPANIER. *Algebraic Topology*. Springer, 1966.
- [Ste51] N. STEENROD. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1951.

- [Tho52] R. THOM. “Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod”. In : *Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série* 69 (1952), p. 109–182.
- [Tho54] R. THOM. “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”. In : *Commentarii Mathematici Helvetici* 28 (1954), p. 17–86.
- [Voi02] C. VOISIN. *Théorie de Hodge et Géométrie Algébrique Complexe*. Société Mathématique de France, 2002.
- [Voi03] C. VOISIN. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*. T. 2. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2003.
- [Wal60] C.T.C. WALL. “Determination of the cobordism ring”. In : *Annals of Mathematics* 72.2 (1960), p. 292.

Table des figures

2.1	Théorème de BÉZOUT avec C_1, C_2 de degré deux.	17
2.2	Théorème de POINCARÉ-HOPF pour la sphère S^2	18
2.3	La classe de THOM d'un fibré vectoriel.	19
2.4	Forme d'intersection.	23
2.5	Plombage.	26
2.6	Plombage de deux sphères.	26
2.7	Cocycle d'un fibré vectoriel.	30
2.8	Fibré en droite associé à un diviseur.	32
3.1	Bordisme.	35
3.2	Les classes non triviales sont d'ordre deux.	36
3.3	Cobordisme orienté.	36
3.4	Espace de THOM.	40
5.1	Lemme de MORSE dans le cas $f = f(q) - x_1^2 + x_2^2$	52
5.2	Théorie de MORSE	52
5.3	Points focaux.	53
7.1	Fibration elliptique.	63
7.2	Fibration de $\mathbf{C}P^2$ au-dessus de $\mathbf{C}P^1$	64
7.3	Éclatement de $\mathbf{C}P^2$ en P	64
7.4	Exemple de fibration avec $d = 2$. (Produit avec <i>SageMath</i> .)	65
7.5	Représentation de $E(1)$	66
7.6	Un voisinage d'une fibre cusp et d'une sphère exceptionnelle.	67
7.7	Recollement suivant un voisinage sans singularité.	67
7.8	Illustration du pinceau de cubiques HESSE dans la carte $z = 1$ et pour x, y réels. (Produit avec <i>SageMath</i> .)	68
7.9	Manipulation topologique pour obtenir un CW-complexe.	70
8.1	La topologie de la fibre singulière lorsque $x = 0$ ou $y = 0$	75
8.2	Caractéristiques des fibres singulières.	79