GÉOMÉTRIE CONTEMPORAINE

Mémoire de master

Raphaël Alexandre

28 avril 2018

École Normale Supérieure
Université Paris VII

Encadré par Ivahn Smadja
Master LOPHISS-SPH

Résumé

Dans ce mémoire, nous adressons la question suivante : qu'est-ce que la géométrie ? En partant du constat que la géométrie en tant que domaine n'est plus aussi reconnaissable que par le passé, par une étude philosophique des mathématiques, nous établissons les outils épistémologiques nécessaires pour proposer une caractérisation de la géométrie contemporaine. Cette caractérisation trouve son origine avec une étude d'écrits mathématiques en géométrie et topologie de William P. Thurston.

Les outils épistémologiques proposés ne sont pas restreints à la question de la qualification de la géométrie, ils seront exposés et utilisés dans un cadre plus général d'épistémologie des mathématiques.

Abstract

In this paper, we address the following question : what is geometry ? From the observation that geometry as a field is no longer as recognizable as in the past, with a study in philosophy of mathematics, we establish the epistemological tools necessary to present a characterization of contemporary geometry. This characterization is based on a study of William P. Thurston's mathematical writings in geometry and topology.

The proposed epistemological tools are not restricted to the question of the qualification of geometry, they will be exposed and used in a more general framework of epistemology of mathematics.

Sommaire

1 Introduction **1**
- 1 Comment vivons-nous la géométrie ? 1
- 2 Le corpus des écrits de Thurston 9
- 3 Problématiques du mémoire 13

2 Géométrie, géométries **17**
- 1 Géométrie, domaine et objet 18
- 2 Topologie des surfaces 23
- 3 Topologie en dimension trois 31

3 Objets géométriques et géométries modèles **33**
- 1 Objets géométriques 34
- 2 Schémas en géométrie algébrique 39

4 Caractérisation de la géométrie **45**
1 Mathématiques géométriques 45
2 Vérification des critères 54
3 Contre-exemples 57
4 Géométriser une théorie 59

ANNEXE **66**

1 Sur l'ontologie des mathématiques **67**
A Sur les théories mathématiques 69
B Sur l'étape d'interprétation (EI) 71
C Sur l'articulation formellement valide (AF) 73
D Synthèse des différentes positions 74

2 Citations complètes **77**
A "What is a geometry ?" 77
B "Three Dimensional Manifolds" 80
C "Geometric manifolds" 81
D Spectre d'un anneau 83

OUTRO **86**

Bibliographie **86**

Chapitre 1

Introduction

1 Comment vivons-nous la géométrie ?

Comment vivons-nous la géométrie ?

Lorsque je pose cette question, il y a une multitude d'interprétations possibles du terme *géométrie*, selon ce qu'on donne, par exemple, comme ontologie à la géométrie. * Comme il est difficile d'avoir un positionnement sur la question de l'ontologie des mathématiques, tentons pour l'instant d'ignorer cette question.

Revenons à celle que je propose : comment vivons-nous, en tant qu'êtres doués d'une sensibilité, la géométrie, en tant que domaine de la pensée rationnelle ?

Si je pose cette question, c'est qu'elle révèle en fait de nombreux positionnements subtils et inconscients (que je crois relevant de notre culture et de notre éducation) au sujet de la géométrie. Ces positionnements ont une influence très importante sur la façon par laquelle on peut saisir, ou non, les mathématiques en question. En particulier, les positions qui vont être évoquées peuvent empêcher toute compréhension philosophique profonde sur le sujet même de la géométrie contemporaine.

La géométrie n'échappe pas aux règles communes de la pensée humaine : penser et comprendre *la géométrie* exige de penser et de comprendre les *intentions géométriques*. Notre *façon de la vivre* révèle notre façon de la concevoir et de la recevoir. C'est en cela un premier pas vers une compréhension des intentions géométriques et donc de la géométrie. Penchons-nous donc sur notre façon de vivre la géométrie, pour commencer à aborder la véritable question de notre travail : penser et comprendre la géométrie.

1.1 Différentes géométries

Notre point de départ pour cette réflexion est la question suivante. Quel est le statut du théorème selon lequel la somme des angles d'un triangle vaut deux

*. Si on considère la géométrie comme étant un jeu complexe d'écriture, on aura une sensibilité tout à fait différente à cette question que si on considère la géométrie comme une façon d'approcher le monde physique ou le monde des idées.

droits ? Nous allons voir comment cette question va rapidement nous mener à nous interroger sur le statut des diverses géométries, et comment on se les représente.

Ce théorème [*], et cela nous vous échappera pas, est un grand classique de la géométrie euclidienne. C'est un fait que l'on apprend lors de notre éducation d'enfant.

Les philosophes ne manqueront pas de noter que ce théorème n'a de valeur (de vérité, idéalement) que pour la géométrie euclidienne. Dans d'autres géométries, appelées non-euclidiennes, ce théorème peut « devenir faux ». Mais comment est-ce possible qu'un théorème devienne faux ? Une preuve mathématique, dans son idéalisation formelle, n'étant qu'une séquence formelle, elle ne peut pas devenir fausse. [†] Ce sont donc les prémisses qui ont changé : les triangles dont on parle ne sont plus les mêmes.

Mais si les triangles ont changé, qu'est-ce qu'un triangle en premier lieu ? Une définition (ou plutôt une description) d'un triangle peut être la suivante : c'est la donnée de trois points distincts. Cette définition, on peut la compléter de sorte à ce que l'on puisse représenter et manipuler les angles d'un triangle : on forme un triangle par ses côtés, qui sont donnés par les segments de droites entre deux sommets.

Remarquez, bien sûr, que je ne précise pas de quoi les points sont éléments. C'est une définition à comprendre dans un contexte déjà spécifié, à savoir ici une géométrie précisée en amont. Cette définition permet bien de comparer les différents objets obtenus pour les diverses géométries considérées, c'est en cela qu'elle est pertinente pour notre discussion.

Une fois de plus, une petite analyse sémantique montre que ce qui change dans le passage de la géométrie euclidienne à une géométrie non-euclidienne, c'est ce que l'on appelle une « droite ».

Qu'est-ce qu'une droite ? Cette question vous paraîtra peut-être innocente, mais prenons-la au sérieux. Il n'y a pas de définition simultanément universelle (dans toutes les mathématiques) et simple de la notion de droite en géométrie. [‡]

Le point de vue que je choisirai, du fait de notre contexte, est celui donné par les géodésiques en géométrie riemannienne. On peut résumer cette approche par la définition suivante d'une droite : c'est la géodésique définie par un point et une direction. À noter que l'on a le théorème suivant [§] : par deux points passe une droite.

Avec cette définition, il devient clair que le théorème sur les angles d'un

∗. Qui n'en n'est pas vraiment un, énoncé tel quel, pour les raisons qui suivent.

†. C'est bien sûr là une idéalisation, la pratique même des mathématiques nous apprend que nous n'avons jamais affaire à de telles preuves. Mais ce qui nous intéresse ici, c'est bien la valeur idéale du théorème.

‡. Par exemple, une droite vectorielle est-elle une droite ? La réponse à cette question modifie notre rapport à ce qu'on appelle une droite, selon que l'on considère son premier lieu d'existence dans le domaine de la géométrie ou de l'algèbre.

§. Dont les hypothèses correctes sont données explicitement dans l'énoncé du théorème de Hopf-Rinow (1931).

triangle va fortement dépendre de la géométrie choisie : les droites étant fruits d'un choix de géométrie, il n'y a que peu de chances pour que la définition d'un triangle en soi indépendante, et ça n'est effectivement pas le cas. Mais ça n'est pas là la fin de notre commentaire.

Il ne vous aura pas échappé que le terme de *géodésique* a recouvert celui de *droite*. Cela n'empêche pas que l'on pense en termes de droites, et non en termes de géodésiques. Mais pourquoi choisissons nous d'appeler *droits* des objets que l'on représente comme non droits (voir figure 1.1) ?

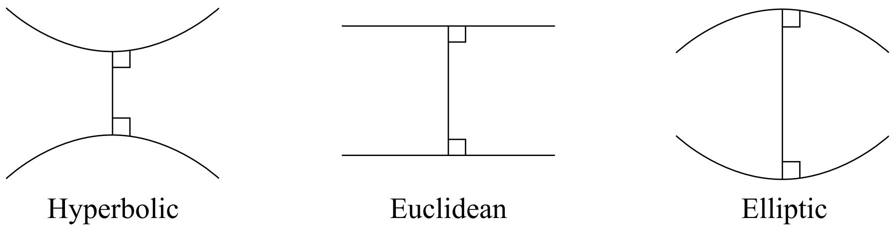

FIGURE 1.1 – Les droites non droites des géométries non-euclidiennes. Source : *Wikipedia*.

Nous faisons, en fait, face à un conditionnement vis-à-vis de la géométrie. Nous vivons classiquement les géométries non-euclidiennes comme étant des cas dégénérés d'une géométrie qui serait correcte (ou plutôt, en adéquation avec la sensibilité), la géométrie euclidienne. Les droites de la géométrie euclidienne sont bien droites, celles des autres géométries courbes. Nous aurions en face de nous une sorte de pirouette langagière pour justifier que le théorème sur la somme des angles d'un triangle puisse être faux : on a appelé *droite* un objet qui ne l'est pas nécessairement (puisqu'une géodésique n'est pas une droite euclidienne), pouvant alors rendre faux un théorème qui *devrait* être *évidemment* juste.

Il est difficile de se défaire de cette pirouette. Il est bien plus économe de penser que le cadre euclidien est le cadre naturel, et que les autres cadres, des fictions mathématiques, servant une recherche pure et déconnectée de considérations physiques. L'histoire des géométries non-euclidiennes n'aidant pas à dépasser ce conditionnement, on gardera à l'esprit que c'est pourtant bien une simple conviction que l'on a. Nous n'avons aucune raison mathématique permettant de croire que la géométrie euclidienne serait la bonne géométrie pour décrire notre monde. Les géométries hyperbolique et sphérique sont d'un point de vue mathématique rigoureusement aussi adaptées.

Il y a, certes, une raison technologique à une telle préférence. La simplicité des calculs en géométrie euclidienne peuvent pousser à croire que c'est le bon contexte à choisir. Mais il ne faudrait pas confondre l'état actuel de la technologie avec une classification ontologique des géométries.

Certains mathématiciens, lorsqu'on leur pose la question de façon informelle, répondent que toutes les géométries « ressemblent localement » à la géométrie euclidienne. Mais cela est ou bien faux, ou bien vrai pour toutes les géométries. S'il s'agit de parler de ressemblance au sens d'isométries, cela est faux puisque la courbure est différente d'une géométrie à l'autre. S'il s'agit de parler de ressemblance au sens d'homéomorphisme, alors, par exemple, cela montre que l'espace hyperbolique est aussi un modèle local de toute géométrie puisque l'espace hyperbolique est homéomorphe à l'espace euclidien. Il en va de même pour la géométrie sphérique puisque tout ouvert simplement connexe d'une sphère est homéomorphe à l'espace euclidien de même dimension.

Par ailleurs, il n'y a pas non plus de raison physique (j'entends par là immédiatement sensible) à un tel choix. La théorie de la relativité d'Einstein dit précisément que nous vivons dans un espace-temps non-euclidien, et cela a été vérifié expérimentalement : en prenant trois lasers disposés de sorte à former un triangle [*], on peut mesurer avec suffisamment de précision les angles et constater que leur somme ne fait pas deux droits. Notons au passage que la somme des angles dépend du placement dans l'espace-temps (il n'y a pas d'homogénéité) ; mais cela ne change rien au fait que la géométrie de l'espace-temps n'est pas la géométrie euclidienne (ni une des deux autres).

De ce dernier argument doit vous apparaître une tension : nous avons bien l'impression que nos droites physiques sont des droites géométriques alors même que notre monde physique n'est pas euclidien. Cette dénomination ne pose pas de problème. Après tout, nous appelons « droit » ce qui nous paraît droit du fait des trajectoires des photons arrivant sur nos rétines, ce qui correspond bien à la notion de géodésique dans l'espace-temps. En réalité, la tension vient du fait que nous avons *choisi* de considérer notre environnement comme correctement investi par la géométrie euclidienne. Mais cette illusion n'a ni fondement mathématique, ni fondement physique. Son origine est en réalité avant tout culturelle et historique. [†]

Pire, cette illusion nous pousse à déconsidérer les géométries qui ne sont pas euclidiennes en les faisant apparaître comme des géométries ou les droites ne sont plus droites. Ce fait de représentation, vient du fait que nous tentons de représenter en géométrie euclidienne des géométries non-euclidiennes. Le même phénomène se produirait si l'on choisissait de représenter la géométrie euclidienne dans, par exemple, la géométrie hyperbolique. Nous vivons donc toujours la géométrie en comparaison avec la géométrie euclidienne, bien que nous n'en n'ayons pas toujours pleinement conscience, c'est là une critique possible de la thèse kantienne.

On remarquera, par ailleurs, que si on représentait correctement la géométrie euclidienne dans notre espace-temps, les droites de la géométrie euclidienne seraient courbes.

À la rédaction de cette réflexion, je n'ai pas pu m'empêcher de me poser

∗. Remarquez que c'est le dispositif expérimental qui nous semble être le plus adapté à la construction concrète et fidèle d'un triangle. Les autres supports, tels que le papier, l'ardoise ou le plastique ne proposent pas une telle précision.

†. On notera sans peine une proximité de cette idée avec une vision conventionnaliste des mathématiques, comme on la retrouve chez Henri Poincaré.

la question : que ressentirais-je si je me tenais face à un trou noir ? Ces lieux de l'espace-temps sont très fortement courbés, et donc fort éloignés de l'espace euclidien si on était amenés à comparer les formes de ces géométries.

Récemment, des travaux ont été menés pour représenter fidèlement un trou noir, tel qu'il nous apparaîtrait. Ces simulations ont notamment été utilisées dans le cinéma* (voir figure 1.2).

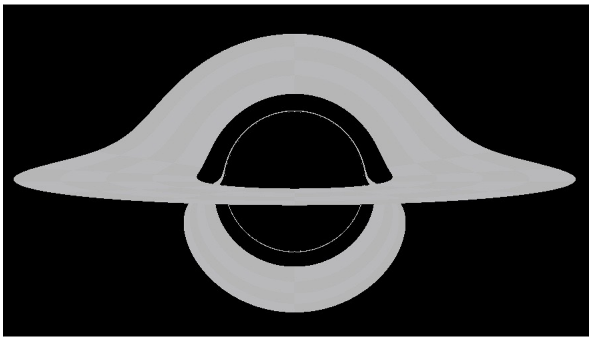

FIGURE 1.2 – Exemple de simulation. Ce qui apparaît comme une forme courbée est en réalité le disque d'accrétion, qui est dans un même « plan » par rapport au trou noir. C'est la forme de la géométrie qui nous fait voir différemment ce disque.

Ce qui est troublant dans ces illustrations (notamment celle proposée), c'est que notre intuition visuelle vient à l'encontre de notre intuition spatiale. On s'attendrait à constater une forme comparable à celle de Saturne (une boule et un anneau), mais on constate une forme différente. Pourtant, ce que nous voyons ne dit pas en lui qu'il est non naturel : nous n'avons pas l'impression que la nature triche avec nous. C'est bien là un sentiment de bouleversement de nos sens : pour réconcilier ce que nous voyons avec ce que nous aimerions voir, il faut repenser notre rapport à la géométrie de la nature (quand bien même cela aurait un sens).

Comment peut-on dépasser cet *a priori* dans notre intuition spatiale ? Les mathématiciens n'ont pas attendu pour adapter leur pratique des mathématiques. Les mathématiciens ont déjà compris que les droites des géométries non-euclidiennes étaient tout aussi droites que celles de la géométrie euclidienne. Il suffit pour cela de voir que les dessins réalisés, par exemple en géométrie projective, font apparaître des droites comme étant droites bien qu'il s'agisse de géométrie sphérique.

À chaque fois, c'est *l'interprétation* du dessin (c'est-à-dire ce qui fait que le dessin prend le sens que nous lui attribuons) qui est modifié par le contexte mathématique. L'apparition, ou non, d'un point d'intersection de deux droites ne sera pas l'argument par lequel on conclura une effective intersection. En géométrie sphérique, on en aura toujours une, bien qu'elle n'apparaisse parfois

*. Par exemple dans *Interstellar* réalisé par Christopher Nolan.

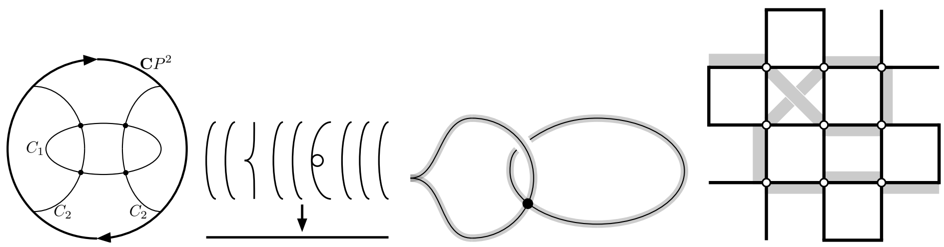

FIGURE 1.3 – Des exemples de dessins géométriques contemporains d'origines diverses.

nulle part †.

De la même façon que nous étendons par notre entendement les segments de droites afin de les penser comme des droites, nous interprétons nos dessins selon la géométrie dans laquelle on veut les situer.

Cette remarque montre que le dessin en géométrie se fait d'une façon bien différente de celle pratiquée jusqu'alors en géométrie euclidienne. Le dessin sert avant tout à supporter (au sens d'être un support) une quantité d'information sur les positions relatives.

L'œil amateur croit pouvoir, d'un dessin, en déduire des quantités géométriques ou même topologiques. Mais l'œil expert *sait* (j'entends par là, sans avoir besoin de le dessiner) que la quantification du dessin dépend du contexte mathématique. Cela a pour conséquence deux phénomènes : des dessins géométriques (voir figure 1.3) peuvent être non fidèles aux donnés géométriques (par exemple des longueurs inexactes, des angles inexacts ou mêmes des dimensions inexactes *) ; et, il y a une véritable formation nécessaire à l'appréhension du dessin géométrique.

C'est pourquoi le mathématicien n'est plus étonné par le fait que l'on représente parfois des droites comme courbes et parfois comme droites. Le mathématicien a dépassé son conditionnement initial (culturel, historique) face au dessin et sait reconnaître les données géométriques bien qu'elles soient dissimulées à la sensibilité immédiate de l'œil.

†. Ou alors, bien qu'elle apparaisse « à l'infini », ce qui est une façon bien énigmatique de répondre à la question « où est le point d'intersection ? ».

∗. Pensons au fait que les mathématiciens ne s'arrêtent pas de dessiner lorsque la dimension devient plus grande que deux.

Que devons nous retenir de cette discussion ? † Tout d'abord, qu'il faut garder à l'esprit que la géométrie contemporaine a dépassé la géométrie euclidienne, non seulement du point de vue de la technique ou de la théorie, mais du conditionnement initial même de la géométrie.

La géométrie contemporaine ne considère pas les géométries non-euclidiennes comme fondamentalement différentes de la géométrie euclidienne. Elles sont traitées avec un statut ontologique égal.

Cette réflexion doit mettre en exergue le fait qu'il faut se détacher d'une approche de la géométrie telle qu'elle a été pensée les siècles précédents. La géométrie ne traite plus ses objets de la même façon, il faut donc réviser la question de ce *qu'est la géométrie et quels sont ses objets.*

1.2 La géométrie

La discussion précédente, que j'ai mise sous le titre « Différentes géométries » n'a pas été totalement respectueuse de la question initiale : *comment vivons-nous la géométrie* ?

Bien qu'elle apporte un éclairage, elle a fait une confusion naïve qui consiste à confondre *la géométrie* en tant que domaine des mathématiques avec l'étude *des géométries* qui sont des objets mathématiques.

En nous intéressant à notre rapport aux différentes géométries, nous avons, certes, cerné des questions essentielles quant à notre rapport au domaine de la géométrie, mais il ne faudrait pas croire que le domaine de la géométrie se limite à l'étude de certaines géométries. Cette confusion naïve ne fausse pas l'intérêt de notre discussion, mais nous devons garder à l'esprit que c'est une limitation de la question initiale.

Parler de géométries demande même à ce que l'on se place déjà dans un contexte mathématique où cela fait sens. *Qu'est-ce qu'une géométrie ?* C'est là une question délicate à laquelle ce mémoire se préoccupera, nous verrons que nous allons progressivement compléter le mot *géométrie* avec *modèle.* Nous situerons cette question dans un cadre : qu'est-ce qu'une géométrie dans une théorie géométrique ? Question, qui soulève bien entendu de multiples autres

†. On pourrait m'opposer l'argument que je dépeins une géométrie figurative, c'est-à-dire une vision de la géométrie qui serait dépendante de la façon par laquelle on représente ses objets. L'argument se poursuivrait avec la conclusion qu'il faudrait s'intéresser à la géométrie sous sa forme algébrique – ou formelle (bien que ce terme fasse apparaître une certaine ironie).
Cet argument ne me paraît pas ouvrir de porte nouvelle. Le simple théorème de Pythagore a une forme algébrique très simple :

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$$

et relève une fois de plus que nous avons un *a priori* fort lorsque nous décidons de mesurer les distances par la norme L^2.
Bien que la géométrie, en tant que corpus mathématique, soit relativement indépendante des figurations ; l'algèbre n'est pas nettoyée de nos *a priori* : nous les avons traduits en des termes algébriques.

mais dont nous allons nous occuper plus tard.

Revenons à notre question initiale, et adressons-là à la géométrie comme domaine des mathématiques. Cette fois-ci, je ne peux pas éluder le problème de l'ontologie. Que signifie-t-il d'avoir un domaine de la géométrie ? Parlons-nous là d'un certain corpus de textes (d'articles, de livres), ou parlons-nous d'un certain ensemble de « choses idéales » ?

Je considèrerai la position suivante quant au domaine de la géométrie : c'est une construction sociale. Je n'entends pas par là que la géométrie serait une fiction humaine, j'entends par là que c'est le produit d'activités socialement inscrites, et que le *domaine* au sens de la délimitation, est la conséquence d'un cadre social, culturel. *

Cela vient poser une difficulté : comment rendre compte de ce cadre social ? C'est bien difficile, mais on peut considérer que cette question intéressera nos contemporains lorsqu'ils chercheront à reconstruire ce cadre historiquement inscrit. Comme nous sommes nous-mêmes pleinement ancrés dans ce cadre, nous n'avons pas à nous préoccuper de sa délimitation précise.

C'est aussi une des raisons pour lesquelles je m'intéresserai exclusivement aux mathématiques contemporaines : ce sont celles qui sont dans le cadre identique à celui dans lequel je suis. Pour m'assurer qu'il s'agit bien de mathématiques contemporaines, j'utilise un critère simple mais relativement efficace : la date de publication des écrits mathématiques. Je considère que les écrits de la fin du siècle passé et de notre siècle correspondent à un cadre qui n'a pas beaucoup évolué. Par ailleurs, ma formation même de mathématicien m'a demandé de digérer des textes écrits pendant cette période. J'ai, en un sens, été moi-même le destinataire de ces mathématiques : lorsque je suis formé, c'est à moi qu'on s'adresse, je n'ai donc pas un regard d'historien. †

Je vis donc la géométrie à travers mes lectures, notamment celles qui m'ont formé. Je pense notamment (dans le domaine de la géométrie) aux livres [Mil65], [MS74], [Sha10], [Spi99], [Sco05] et [GS99]. J'oublie évidemment beaucoup de titres dans cette liste, mais cela n'a pour but que de donner une idée

*. Vous noterez que je ne me prononce que pour l'ontologie des domaines des mathématiques, et non pas des mathématiques.

†. Cette discussion, que je crois fondamentale en histoire, m'est venue à la lecture de *Qu'est-ce que l'art préhistorique ?* de Patrick Paillet. Contrairement à l'art préhistorique, nous sommes bien les destinataires des écrits mathématiques. Nous pouvons (théoriquement) comprendre les intentions et les conceptions de ceux qui les ont écrits car nous sommes dans le même cadre qu'eux. C'est une facilité qui n'existe plus lorsque nous remontons dans l'histoire : comment pouvons-nous savoir ce que signifiait le terme *droite* chez Euclide alors même que nous n'en n'avons que des mots tentant de correspondre à cette conception ? La lecture de *L'Œuvre de l'art* de Gérard Genette m'a beaucoup influencé quant à mon approche de la question de l'interprétation des œuvres : ce que nous percevons de celles-ci ne correspond peut-être pas à ce qu'elles sont, tout comme une partition de musique n'est pas l'œuvre qu'elle veut représenter et dont la représentation nécessite une interprétation bien particulière et difficile à transmettre (des interprétations de partitions peuvent être mauvaises du fait qu'elles ne respectent pas le cadre historique).

du corpus sur lequel j'ai fondé ma conception des mathématiques.

Puisque mes lecteurs ne sont pas moi, je me dois de formuler une réponse moins personnelle (voire évasive) à la question : quelles sont les théories géométriques contemporaines ?

Nous étudierons par la suite une partie des écrits mathématiques de William Paul Thurston (1946-2012), les travaux en question sont postérieurs à 1970 et donc relativement récents. Cela nous donnera un corpus initial commun sur lequel nous accolerons l'étiquette « mathématiques contemporaines ».

Mais la réflexion de ce mémoire dépassera ce corpus pour aller vers un travail original plus général : une caractérisation de la géométrie contemporaine.

Nous vivons la géométrie contemporaine par la pratique et l'apprentissage. Chacun de ces deux actes est essentiellement personnel, voire intime, et donc la caractérisation de ce qu'est la géométrie contemporaine en est impactée. Mais la culture mathématique contemporaine accole d'elle-même des étiquettes aux théories.

Ainsi, un certain ensemble de mathématiciens aura du mal à fixer précisément un groupe de théories derrière l'expression « géométrie », mais ils auront individuellement une idée relativement claire de ce qu'ils pensent être une théorie géométrique. C'est cette idée variable selon les sujets, mais stabilisée par un contexte social, que nous allons interroger.

Cette idée, une fois abstraite des individus, est alors une donnée socialement inscrite et incomplète : certaines théories n'ont pas d'étiquette claire (qu'elles soient géométriques, ou non, n'est pas fixé). C'est cette incomplétude qui rend notre étude nécessaire : en l'absence d'une liste exhaustive des théories géométriques, la pensée de la géométrie doit trouver une autre façon d'être conçue.

2 Le corpus des écrits de Thurston

Pour mener à bien la réflexion proposée dans ce mémoire, je vais donc commencer par analyser une partie du corpus de William Thurston.

Ce mathématicien a proposé des travaux d'une grande importance en géométrie et topologie en petites dimensions. Ces travaux sont ouvertement qualifiés de géométriques, et c'est pourquoi ce sera un point de départ pour tenter de discerner le domaine de la géométrie contemporaine.

Le but des chapitres 2 et 3 sera d'analyser les travaux qu'il a menés en géométrie et topologie en dimension trois. Ces travaux ont abouti à la formulation d'une conjecture : la conjecture de géométrisation, dont la démonstration a été achevée par Perelman au début de notre siècle. La richesse conceptuelle de ces travaux sera un réel moteur pour le présent mémoire.

Je vais donc maintenant préciser le contexte des écrits de Thurston* sur lesquels je me baserai par la suite.

Tout d'abord, on utilisera l'article [Thu94] qui donne de nombreuses explications, notamment sur son style d'écriture et sa personnalité mathématicienne. De façon connexe, l'article [Thu98] donne des indications sur la perception qu'a Thurston sur sa conjecture et plus généralement le sujet des variétés de dimension trois. Les textes purement mathématiques sur lesquels je me baserai sont, tout d'abord, l'article [Thu82] dans lequel il établit sa conjecture de géométrisation ; puis les « Notes de Thurston » [Thu02] et le livre [Thu97] descendant de ces notes.

Dans cette partie, je me donne pour but d'expliquer l'origine des notes de Thurston et des objectifs ayant donné lieu au livre [Thu97].

2.1 "On Proof and Progress in Mathematics"

L'article [Thu94] publié en 1994 dans le *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* s'intitule *On Proof and Progress in Mathematics.*

Cet article est présenté (par son auteur) comme un essai en réponse à l'article de Jaffe et Quinn, [JQ93], *"Theoretical Mathematics" : Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics* (publié dans le même journal en 1993). Cet article a été la source d'une controverse (voir [al94] et par exemple [Stö05]).

Si cet article nous intéresse ici, ce n'est pas tant ce qui concerne la réponse à l'article de Jaffe et Quinn (bien qu'elle ne manque pas d'intérêt), mais la partie où Thurston donne des éléments autobiographiques sur sa carrière et sur la motivation des textes [Thu02] et [Thu97]. Cette partie est la partie *6. Some Personal Experiences.*

> I gradually built up over a number of years a certain intuition for hyperbolic three-manifolds, with a repertoire of constructions, examples and proofs. [...] After a while, I conjectured or speculated that all three-manifolds have a certain geometric structure ; this conjecture eventually became known as the geometrization conjecture. About two or three years later, I proved the geometrization theorem for Haken manifolds. It was a hard theorem, and I spent a tremendous amount of effort thinking about it.
>
> [...]
>
> Neither the geometrization conjecture nor its proof for Haken manifolds was in the path of any group of mathematicians at the time — it went against the trends in topology for the preceding 30 years, and it took people by surprise. To most topologists at the

*. Les travaux mathématiques de Thurston ont été assez peu abordés par la littérature. L'une des uniques références philosophiques au sujet des mathématiques de Thurston est un article de Michel Boileau intitulé *Géométries en dimension trois : de H. Seifert à W. Thurston* et qui figure dans [Kou+05].

> time, hyperbolic geometry was an arcane side branch of mathematics, although there were other groups of mathematicians such as differential geometers who did understand what the geometrization conjecture meant, what it was good for, and why it was relevant.
>
> At the same time, I started writing notes on the geometry and topology of 3-manifolds, in conjunction with the graduate course I was teaching. I distributed them to a few people, and before long many others from around the world were writing for copies. The mailing list grew to about 1200 people to whom I was sending notes every couple of months. I tried to communicate my real thoughts in these notes. People ran many seminars based on my notes, and I got lots of feedback.

De cette courte citation, on apprend de nombreux éléments sur le contexte de la constitution des notes de Thurston (ainsi nommées par la communauté).

Tout d'abord, Thurston exprime le fait qu'au moment de leur écriture, la conjecture de géométrisation et sa preuve pour les variétés de Haken étaient inaccessibles pour l'audience mathématicienne à laquelle il était confronté. Pour ne pas reproduire l'effet qui a eu lieu lors de ses travaux sur les feuilletages*, Thurston a décidé qu'il fallait entreprendre une action didactique : la rédaction de notes permettant d'enseigner le contexte et sa pensée ("to communicate my real thoughts") sur le sujet, et dans l'objectif d'obtenir une communauté capable d'appréhender la conjecture et le théorème pour les variétés de Haken.

Ainsi, si les notes de Thurston sont si particulières dans le corpus mathématique contemporain, c'est parce qu'elles sont ambitieuses dans un double objectif : didactique et technique. Ce double objectif a une origine claire : permettre à une communauté mathématicienne d'être prête à accueillir les travaux de Thurston ("Neither the geometrization conjecture nor its proof for Haken manifolds was in the path of any group of mathematicians at the time").

Cette interprétation est confirmée dans la suite de la section du même article.

> In reaction to my experience with foliations and in response to social pressures, I concentrated most of my attention on developing and presenting the infrastructure in what I wrote and in what I talked to people about. I explained the details [of the conjecture and its proof for Haken manifolds] to the few people who were "up" for it. I wrote some papers giving the substantive parts of the proof of the geometrization theorem for Haken manifolds — for these papers, I got almost no feedback. Similarly, few people actually worked through the harder and deeper sections of my notes until much later.

∗. Pour comprendre cet épisode, voir le début de cette section 6 de l'article [Thu98].

> The result has been that now quite a number of mathematicians have what was dramatically lacking in the beginning : a working understanding of the concepts and the infrastructure that are natural for this subject.
>
> [...]
>
> What mathematicians most wanted and needed from me was to learn my ways of thinking, and not in fact to learn my proof of the geometrization conjecture for Haken manifolds.

Ces éléments décrits par THURSTON nous permettent de comprendre pourquoi autant de discussions (que l'on pourrait qualifier de philosophiques) sont présentes dans les notes, et plus particulièrement dans le livre [Thu97]. On comprendra aussi les origines de textes comme l'article *How to see 3-manifolds*, [Thu98].

La version de ces notes que j'emploierai est [Thu02]. Il s'agit d'une version retranscrite en LaTeX des notes de THURSTON distribuées en 1980 par l'université de Princeton. Elles ont été globalement fidèlement retranscrites, bien que quelques typos aient été corrigées (et d'autres parfois malencontreusement insérées) ; la description du document précise : "no attempt has been made to update the contents."

On notera cependant la réelle difficulté à se procurer ces notes dans leur version originale. *

2.2 Le livre *Three-Dimensional Geometry and Topology*

Des notes de THURSTON, un livre édité a été produit. Il s'agit de la référence [Thu97]. Ce premier volume de ce qui a été un programme ambitieux (éditer et compléter l'ensemble des notes), est le seul ayant été publié.

On peut lire le passage suivant dans la préface de [Thu97, p. vii].

> The notes were originally aimed for an audience of fairly mature mathematicians, and presented material not in the standard repertoire. A number of seminars worked through these notes. Some of the feedback from seminars and individuals convinced me that it would be worth filling in considerably more detail and background, there were several places where people tended to get stuck, sometimes for weeks. I embarked on a project of clarifying, filling in and rearranging the material before publishing it.
>
> Far more time (and blood, sweat and tears) has elapsed since the time of the original notes than I intended or anticipated. The

*. J'ai passé un certain temps à essayer de récupérer une version numérisée des notes, qui puisse être diffusée plus largement. Je me suis heurté au fait que très peu de personnes possèdent ces notes de façon complète, et aucune n'ayant les moyens de faire de le travail de numérisation, cette recherche ne s'est pas conclue positivement.

> present text originated from several chapters of the original notes, but it has undergone deep transmutation.

Dans les indications aux lecteurs, Thurston décrit, ce que l'on pourrait appeler, le contrat didactique du livre. En particulier, on peut lire le passage suivant (page ix de la même référence).

> The style of exposition in this book is somewhat experimental.
>
> The most efficient logical order for a subject is usually different from the best psychological order in which to learn it. Much mathematical writing is based too closely on the logical order of deduction in a subject, with too many definitions before, or without, the examples which motivate them, and too many answers before, or without, the questions they address. In a formal and logically ordered approach to a subject, readers have little choice but to follow along passively behind the author, in the faith that machinery being developed will eventually be used to manufacture something worth the effort.

La préface, les indications aux lecteurs et le paragraphe précédent devraient suffire à nous fixer les idées sur les buts des notes [Thu02] et du livre [Thu97] de Thurston.

On retiendra principalement qu'elles ont un but double : didactique et technique. Ce sont des textes de niveau mathématique élevé ayant pour but de dresser le contexte nécessaire à l'approche de la conjecture de géométrisation et du théorème pour les variétés de Haken. L'objectif didactiquement ambitieux renforce notre intérêt pour ce texte : Thurston a écrits de longs développements sur sa façon de comprendre le sujet (on pourrait oser dire qu'il s'agit de sa philosophie). Ces passages seront au cœur de nos préoccupations par la suite.

3 Problématiques du mémoire

Il me semble également nécessaire pour ce chapitre introductif, de présenter en des détails intelligibles pour le non spécialiste, de quoi il est question lorsque je parlerai de la conjecture de géométrisation de Thurston. Cela me permettra également de donner une série de problématiques philosophiques qui structureront mon mémoire.

3.1 Sur la classification topologique

Si on devait donner un *Hauptmotiv* au sujet de la topologie algébrique, ce serait le suivant. Étant données deux variétés topologiques* M et N, à quelles conditions sont-elles homéomorphes ou non homéomorphes ?

À cette question, la topologie algébrique a associé un *Hauptmotiv* secondaire : l'association d'invariants algébriques à des objets topologiques (variétés, complexes cellulaires, complexes simpliciaux, etc.).

L'un de ces invariants, qui jouera un rôle essentiel en dimensions deux et trois, est le *groupe fondamental* d'un espace topologique. (Toute variété est un espace topologique.) Ce groupe fondamental, traditionnellement noté $\pi_1(M)$ lorsque M est l'espace étudié, est un groupe, qui est l'une des structures mathématiques les plus présentes en algèbre.

Par exemple, au cercle S^1, on associe le groupe $\mathbf{Z}$. Au tore (qui est le produit cartésien $S^1 \times S^1$) on associe $\mathbf{Z}^2$.

De nombreuses introductions au domaine de la topologie algébrique existent, et je ne voudrais pas donner un texte de moins bonne qualité que ce qui est déjà présent. On pourra consulter par exemple [Sai17], [Mil65], [Mil69], [MS74].

La topologie algébrique reformule donc la question initiale de la façon suivante. Quels sont les invariants algébriques qui permettent de distinguer deux variétés ?

Cette question, on peut la traiter de façon purement topologique, c'est-à-dire sans faire appel à des notions venant par exemple de la géométrie riemannienne. Cela peut donner par exemple la classification des surfaces fermées, que je présenterai au chapitre 2.

Mais parfois, il est nécessaire d'introduire des outils géométriques†. C'est notamment le cas en dimension trois (une discussion sur la nécessité de cette introduction est également donnée au chapitre 2).

3.2 La conjecture de géométrisation de Thurston

La conjecture de Thurston est une réponse au problème de la classification topologique des variétés de dimensions trois. Son énoncé ([Thu82]) est difficile, j'ai donc choisi d'exposer ce que l'on pourrait appeler *le théorème de géométrisation en dimension deux*, et j'expliquerai comment la conjecture de géométrisation en dimension trois s'en rapproche.

*. Une variété topologique de dimension n peut être comprise comme le recollement de copies de $\mathbf{R}^n$ selon des applications continues (par exemple, la sphère S^n peut-être vue comme le recollement de deux copies de $\mathbf{R}^n$: c'est l'idée des cartes terrestres). C'est l'objet récurrent en topologie algébrique, il incarne la notion d'objet géométrique, en un sens qui sera discuté au chapitre 3.

†. Le terme « outil géométrique » doit être pris dans le sens « outil de la géométrie différentielle ». Il ne faut pas y voir là la détermination du sens du mot *géométrie*.

Le théorème de géométrisation en dimension deux

Revenons au cas des surfaces fermées. Une discussion détaillée aura lieu au chapitre 2, mais il est n'est pas inutile de donner ici l'essence des résultats présentés.

Si je considère une surface fermée S, il y a une façon univoque d'associer à S un couple (G, X) où X est l'un des trois espaces $\{S^2, \mathbf{R}^2, \mathbf{H}^2\}$ et G est un sous-groupe du groupe des symétries de X. Par exemple, le tore $S^1 \times S^1$ peut être associé à $(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$.

En réalité, à un couple (G, X), la surface S associée est homéomorphe au quotient, X/G, de X par l'action de G. Ce qui donne dans notre exemple $S^1 \times S^1 \simeq \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

Mais le fait profond est le suivant. *Toute surface S suffisamment simple*[*] *est homéomorphe à X/G où (G, X) est un couple de sorte que X est l'un des trois espaces de référence*[†] *et G est un sous-groupe des symétries de X.* C'est ce que l'on pourrait appeler le théorème de géométrisation en dimension deux.

La conjecture de géométrisation de Thurston

Cette conjecture peut être énoncée de la façon suivante. *Toute variété de dimension trois M suffisamment simple*[‡] *est homéomorphe à X/G où (G, X) est un couple de sorte que X est l'un des* **huit** *espaces de référence*[§] *et G est un sous-groupe des symétries de X.*

Énoncée de cette façon, la conjecture de géométrisation est proche de la classification topologique. C'est bien le cas : la conjecture de géométrisation permet effectivement de classifier topologiquement les variétés de dimensions trois.[¶]

Sur la résolution

La conjecture de Thurston a été prouvée par Thurston dans un cas particulier : celui des variétés de Haken. Le cas général a été prouvé par les travaux de Perelman au début des années 2000 ([KL08]). La conjecture de Thurston est donc à présent un théorème.

La classe des variétés de Haken est très large. Thurston a donc énoncé cette conjecture avec un sérieux indice de la plausibilité ([Thu82]). Cependant les outils que Pereleman a utilisés diffèrent largement de ceux que

*. Simple signifie fermée ce cas de figure.
†. En dimension deux : le plan euclidien, le plan hyperbolique et la sphère.
‡. Dans ce cas-ci, c'est plus délicat, le lecteur mathématicien devrait se référer directement à [Thu82].
§. En dimension trois : l'espace euclidien, l'espace hyperbolique, la 3-sphère, le produit $S^2 \times \mathbf{R}$, le produit $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, la géométrie Nil, la géométrie Solv et le revêtement universel de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.
¶. En particulier, la conjecture de Poincaré, l'un des prix du millénaire, en est conséquence.

Thurston a employés.

3.3 Les questions philosophiques posées

Je me dois maintenant de donner plus de détails sur la profondeur philosophique de cette conjecture et des travaux de Thurston.

L'un des points absolument essentiels de la conjecture de géométrisation, c'est évidemment l'énumération des divers espaces X possibles. Dans le cas de la dimension deux, nous en avions trois : c'était les espaces homogènes et isotropes dont la courbure était normalisée.

En dimension trois, cependant, on ne peut pas se limiter à ces espaces. Il faut nécessairement étendre les espaces possibles.

On peut déjà énoncer la question sous-jacente : qu'est-ce qu'un espace géométrique essentiel ? « Qu'est-ce qu'une géométrie ? » sera la question explicitement discutée par Thurston.

De cette question en découle une autre. Étant donnés les espaces géométriques essentiels, comment exprimer la relation entre une variété et un de ces espaces ? En d'autres termes : comment les variétés peuvent-elles être *modelées* sur ces espaces ?

Cette question de la dialectique entre espaces essentiels (que je vais appeler par la suite du chapitre 2, *géométries modèles*) et variétés sera au centre de mes préoccupations au chapitre 3. J'y établirai notamment une hypothèse quant à une caractérisation possible du domaine de la géométrie contemporaine en mathématiques : *(H) La géométrie se discerne par le fait qu'elle articule géométries modèles et objets géométriques modelés sur ces premières.*

Au chapitre 4, je proposerai un traitement de cette hypothèse. Je proposerai un cadre épistémologique précis pour l'énoncer et je proposerai une série d'exemples et de contre-exemples permettant de renforcer l'argumentaire. Nous étudierons ainsi en précision ce que cela signifie d'avoir une théorie géométrique. Nous étudierons également un affinement épistémologique afin d'aborder la question des intentions géométriques, cela se fera en traitant la question de géométriser une théorie.

Les chapitres 2 et 3 auront déjà montré que cette hypothèse est bien fondée dans le cas de la géométrie de Thurston. La série d'exemples et contre-exemples confirmera que cette hypothèse peut être valable plus généralement, proposant alors une façon de décrire la géométrie qui soit positive : une série de caractères pouvant être vérifiés directement dans les corpus, qui peut ainsi qualifier directement une théorie selon ces critères.

Chapitre 2

Géométrie, géométries

THURSTON écrit dans [Thu98] : "To most topologists at the time [of the geometrization conjecture], hyperbolic geometry was an arcane side branch of mathematics."

Si la géométrie hyperbolique est apparue comme une géométrie fictionnelle et alternative à la géométrie euclidienne (voir [Mil82]), elle est en fait au centre de considérations topologiques et géométriques contemporaines.

À travers les écrits de THURSTON, on constate que la géométrie hyperbolique a non seulement dépassé son cadre initial de « géométrie imaginaire », elle intervient même dans des questions topologiques et, ce, de façon cruciale.

Comment se fait-il que la géométrie hyperbolique puisse être utile à des questions topologiques ? Si la question de la classification topologique des variétés de dimension trois s'énonce de façon purement topologique (c'est-à-dire indépendamment des structures géométriques), il s'avère qu'elle ne peut pas être traitée indépendamment de la question de la géométrie des variétés.

Les travaux de THURSTON s'inscrivent dans la question de la classification des variétés topologiques de dimension trois. Il formula notamment la conjecture de géométrisation qui porte son nom. Démontrée avec les travaux PERELMAN (voir, [KL08]), elle conclut la question du divers des géométries possibles.

Il nous faut signaler que la conjecture même de géométrisation formulée par THURSTON demande une définition de ce qu'est une géométrie. C'est une question tout à fait essentielle du fait même que l'on ne peut parler de géométrisation qu'une fois que la question de ce qu'est une géométrie est résolue. Ce n'est donc pas un hasard si THURSTON s'applique à expliquer une vision des mathématiques : cela lui permet de justifier son approche de la conjecture.

Mon développement se fera de la façon suivante. Tout d'abord, j'aimerais clarifier une question de langage concernant le terme *géométrie*.

Par la suite, de façon à pouvoir exposer clairement comment on peut faire intervenir l'hyperbolicité dans la question de la classification des surfaces fermées, je présenterai une première fois cette classification topologique sans prendre en compte la question de la géométrie des surfaces.

Puis, je montrerai comment la géométrie s'articule dans cette classification. Ce développement montrera notamment que les surfaces hyperboliques sont en fait le cas général des surfaces fermées, et que seuls quelques exemples isolés donnent les autres « saveurs » (terme que j'emprunte à THURSTON) du divers des géométries.

Enfin, la dernière partie me permettra de montrer pourquoi des considérations géométriques sont essentielles dans la classification topologique des variétés de dimension trois.

1 Géométrie, domaine et objet

Avant d'aborder le cœur du sujet de ce chapitre, il me semble nécessaire de délimiter avec précision l'un des concepts en jeu.

Quels sont ces concepts en jeu ? Le principal sera celui de *géométrie*. En effet, si THURSTON propose une conjecture de *géométrisation*, cela signifie bien que nous devons avoir les idées au clair par rapport à la signification du mot *géométrie*.

Nous allons rapidement nous rendre compte que le terme *géométrie* n'a, en réalité, pas de signification unique. Il se décline selon son emploi.

En premier lieu, on peut parler de *la géométrie* comme branche des mathématiques. Historiquement, elle fut telle de façon claire. Mais aujourd'hui, on peut poser la question de l'existence d'une telle branche.

Il y a-t-il encore une branche des mathématiques, ou du moins un domaine identifiable, correspondante à *la géométrie* ? Nous constatons qu'il existe au moins différentes géométries, au pluriel. Si nous regardons les différentes catégories existantes au sein d'arXiv [*], on constate quatre occurrences du terme *"geometry"* dans les catégories de premier rang : *"Algebraic Geometry, Differential Geometry, Metric Geometry, Symplectic Geometry"*. Si cette classification peut être remise en doute, il y a en revanche un fait qui ne peut pas l'être : la *géométrie* n'est plus un domaine singulier, elle est toujours composée d'un terme supplémentaire pour délimiter un champ, par exemple : géométrie *algébrique*, géométrie *différentielle*.

La question à laquelle nous devrons répondre est donc la suivante. Lorsque THURSTON parle de géométrie, au sens du domaine, qu'entend-il ?

En deuxième lieu, on peut interroger le terme *géométrie* dans le sens de l'expression *une géométrie*. Qu'est-ce qu'une géométrie ?

Cette question se pose pour un sens du mot *géométrie* bien différent du précédent. On aurait par exemple envie de répondre à cette question : la géométrie hyperbolique, la géométrie euclidienne ou encore la géométrie sphérique. Il s'agit en fait ici du sens mathématique du mot *géométrie*. Il s'agit d'interroger quels sont les objets mathématiques que l'on appelle *géométries*.

*. Lien `https://arxiv.org/archive/math` consulté en novembre 2017.

Cette question est tout à fait essentielle. En effet, puisque THURSTON propose une conjecture de géométrisation, il s'agit bien pour lui de préciser les différentes géométries en ce sens.

1.1 Situation de la géométrie chez THURSTON

Ainsi, notre premier axe de questionnement est le suivant. *Que signifie la géométrie, au sens du domaine et des pratiques, chez* THURSTON *?*

Pour répondre à cette question, en restant fidèles aux textes de THURSTON, il nous faut tout d'abord rappeler le contexte de ses travaux, en particulier le contexte mathématique du livre [Thu97] dont je ferai usage par la suite.

Le livre [Thu97] de THURSTON se situe précisément dans l'axe de la conjecture de géométrisation. Mais de quoi est-il question mathématiquement lorsque l'on parle de la conjecture de géométrisation ?

Il s'agit de travailler sur la classification topologique des variétés de dimension trois. Cela signifie que l'objet mathématique principalement en jeu est la variété de dimension trois, et que l'objectif est la classification topologique.

Une classification topologique n'a *a priori* pas grand rapport avec des outils de géométrie. Nous discuterons de ce rapport plus tard, mais pour le moment, admettons que l'emploi d'outils géométriques soit naturel. La principale différence mathématique à garder à l'esprit est qu'une classification topologique ignore les structures géométriques. Une variété topologique n'a *a priori* même pas de structure différentiable. Il y a donc une première étape consistant à associer aux variétés topologiques des structures géométriques.

C'est en ce sens précis que nous allons maintenant interroger le sens du mot *géométrie*. De quoi parle-t-on lorsque le terme *géométrie* est employé au sens du domaine ayant pour objets des outils et objets géométriques ?

Pour répondre à cette question, je propose d'étudier le glossaire écrit par THURSTON dans le livre [Thu97]. Je montrerai comment s'en servir pour répondre à la question que j'ai posée, et j'expliciterai ce qui y est dit.

À l'entrée *geometry* du glossaire [Thu97, p. 292], on lit la description suivante.

> **geometry.** Sometimes we use "geometry" interchangeably with "metric." Other times, "geometry" refers to the set of properties of a space that depend on the metric. Other times yet, it refers to the properties of a space that are invariant under a group of transformations of the space, which depends on the context. Thus projective geometry, Euclidean geometry, hyperbolic geometry.

Cette description contient quatre phrases. Chacune d'entre elles est porteuse d'un sens bien particulier du mot *géométrie*.

Premier sens

On lit tout d'abord "*Sometimes we use 'geometry' interchangeably with 'metric.'*" Cette phrase se comprend dans le contexte suivant.

Si je me donne une variété lisse, M, je peux considérer qu'une géométrie sur M est la donnée d'une métrique sur M. Il s'agit essentiellement de la signification étymologique du mot *géométrie*.

La « géo-métrie » signifie la « mesure de la terre ». On parle en géométrie riemannienne de *géodésique* pour signifier les chemins de plus courtes distances (en respectant la métrique choisie). Le terme géodésique vient de géodésie, signifiant « le partage de la terre ».

Il faut alors comprendre le terme *terre* comme ayant évolué de sorte à ce qu'il signifie maintenant, bien souvent, la *variété* (considérée). Une *géométrie* donne alors le sens d'une mesure sur une variété, une *géodésie* la façon de la partager.

Selon ce premier sens, faire de la géométrie, comme domaine des mathématiques, c'est étudier les mesures que l'on peut effectuer sur une variété. C'est bien ce que l'on entend par la notion de métrique.

Deuxième sens

On lit ensuite "*Other times, 'geometry' refers to the set of properties of a space that depend on the metric.*"

Cette fois-ci, il s'agit non pas d'étudier les mesures, mais les propriétés d'une métrique. Ce sens est proche du premier, cependant il fait entrevoir une progression.

L'étude des mesures sur une variété peut se faire de façon aveugle, en calculant par exemple des géodésiques de façon explicite. Mais elle peut aussi se faire dans un schéma plus large : on considère que la mesure des distances sur la variété donne lieu à des propriétés de cette même variété.

Par exemple, on peut étudier les propriétés métriques d'une variété, sans s'intéresser à des mesures de géodésiques. La courbure est un tel exemple, donnant des théorèmes comme le fameux théorème de Gauss-Bonnet.

En ce sens, le domaine sous le nom de géométrie, désigne l'ensemble des propriétés (et des objets) que l'on obtient par usage d'une métrique sur une variété. Il ne s'agit donc plus uniquement de l'étude des mesures comme finalité en soi.

Troisième sens

Il s'ensuit "*Other times yet, it refers to the properties of a space that are invariant under a group of transformations of the space, which depends on the context.*"

Cette fois-ci, le sens diffère de façon plus importante. La référence pertinente est le programme d'Erlangen de Felix Klein.

Le contexte est le suivant. À une variété riemannienne M, on peut associer naturellement le groupe des isométries de M. C'est-à-dire le groupe des difféomorphismes laissant invariante la métrique de M. Dans le cas général, ce groupe est trivial : la seule isométrie est l'identité. Mais lorsque M est douée de symétries (au sens usuel), ce groupe n'est alors plus trivial.

L'étude de ce groupe permet donc aussi de comprendre les diverses symétries de M. Cela a son importance lorsque M est une géométrie, au sens qui sera abordé dans la section suivante.

Mais comme domaine, on comprend alors la géométrie comme étant l'étude des symétries. Cette étude peut par ailleurs se faire avec des outils algébriques, allant alors dans la direction du programme d'Erlangen.

Quatrième sens

Enfin, la quatrième phrase “*Thus projective geometry, Euclidean geometry, hyperbolic geometry.*” donne en réalité des exemples de géométries, au sens qui sera étudié dans ce qui suit immédiatement.

1.2 Géométries comme objets

À présent, explorons la signification du mot *géométrie* dans la deuxième direction proposée, à savoir de géométries comme objets mathématiques.

Le dernier sens de la citation précédente évoque les géométries sphérique [*], euclidienne et hyperbolique. Ce sont trois premiers exemples d'objets mathématiques que l'on appelle « géométries ».

La question qui se pose à nous est alors la suivante. Comment caractériser (positivement) ces objets ? Qu'est-ce qu'une géométrie ? C'est précisément cette question que Thurston pose dans [Thu97], pages 179 et 180.

> What is a geometry ? Up till now, we have discussed three kinds of three-dimensional geometry : hyperbolic, Euclidean and spherical. They have in common the property of being as uniform as possible : their isometries can move any point to any other (homogeneity), and can take any orthonormal frame in the tangent space at a point to any other orthonormal frame at that point (isotropy). There are more possibilities if we remove the isotropy condition, allowing the space to have a grain, so to speak, so that certain directions are geometrically distinguished from others.
>
> An enumeration of additional three-dimensional geometries depends on what spaces we wish to consider and what structures we use to define and to distinguish the spaces. For instance, do we think of a geometry as a space equipped with such notions as lines and planes, or as a space equipped with a notion of congruence, or

$*$. On parle aussi de géométrie elliptique ou de géométrie projective.

> as a space equipped with either a metric or a Riemannian metric ? There are deficiencies in all of these approaches.
>
> The problem with using lines and planes is that they aren't general enough. [...]
>
> Using congruence as the essence of the definition leads to an excessive proliferation of geometries. [...]
>
> The best way to think of a geometry, really, is to keep in mind these different points of view all at the same time. If we regard changes of the group of congruences that do not change the metric and changes of the metric that do not change the group of congruences as inessential changes in the geometry, and if we also consider two geometries the same when the sets of compact manifolds modeled on them are identical, we end up with a reasonable enumeration of geometries.

Ce développement que Thurston présente * donne lieu à une définition précise de ce qu'il va appeler une *géométrie modèle*.

Ce concept sera étudié en profondeur au chapitre suivant. On peut lire l'intégralité de la discussion et la définition formelle de géométrie modèle en annexe 2-A.

Cependant, à ce stade, on peut faire la remarque suivante. La difficulté de la conjecture de géométrisation ne se situe pas en l'énumération des géométries modèles possibles. En effet, cette énumération fait l'objet d'un théorème dont la preuve ne fait que quelques pages.

En fait, la difficulté de la conjecture de géométrisation réside en la dialectique entre, d'une part, les géométries modèles, et d'autre part, les variétés sur lesquelles il faut arriver à plaquer ces géométries. Cette dialectique sera elle aussi étudiée plus en détails au prochain chapitre.

1.3 Distinction du modèle hyperbolique

Terminons cette section sur une question méta-mathématique. On peut constater qu'il existe différentes géométries modèles. En dimension deux nous en connaissons trois, en dimension trois on peut en établir huit. Toutes ces géométries se valent-elles ?

Si on suit les commentaires de Thurston, notamment dans [Thu98] et [Thu82], on constate qu'il défend l'idée d'une géométrie hyperbolique dominante de par sa richesse.

Dans [Thu98], il est écrit :

> Not *all* 3-manifolds are hyperbolic. There are actually eight different flavours of three-dimensional geometry, describing eight different classes of 3-manifolds. [...] It is easy to deduce that a

∗. Que l'on pourrait par ailleurs facilement qualifier de philosophique, bien que Thurston ne le présente pas de la sorte.

> manifold that has one of the seven non-hyperbolic flavours is topologically quite special. It is natural to assume by analogy that hyperbolic manifolds are special. They are indeed special, but they are plentiful.
>
> [...]
>
> [The] geometric manifolds having any of the seven non-hyperbolic flavours have been completely classified in an orderly and understandable way.
>
> The true complexity of the structure of 3-manifolds—at least if the geometrization conjecture holds—is the structure of hyperbolic 3-manifolds.

Dans [Thu82] on peut lire :

> [O]f these eight [geometries], hyperbolic geometry is by far the most interesting, the most complex, and the most useful.

Pourquoi un tel intérêt ? On peut justifier ces citations par différents résultats mathématiques connus de Thurston au moment de l'énoncé de la conjecture. Dans l'article de 1982, [Thu82], on peut par exemple trouver les éléments de réponse suivants.

> 2.3. Theorem. *The interior of a compact 3-manifold M^3 with nonempty boundary has a hyperbolic structure iff M^3 is prime, homotopically toroidal and not homeomorphic to Example 2.2.*
>
> [...]
>
> 2.5. Corollary. *If $K \subset S^3$ is a knot, $S^3 - K$ has a geometric structure iff K is not a satellite knot. It has a hyperbolic structure iff, in addition, K is not a torus knot.*

Ces deux résultats montrent déjà que de très larges classes de variétés sont hyperboliques. Mais on peut y rajouter encore des arguments. En effet, certaines géométries sont complètements comprises : on peut énumérer les quelques variétés qu'elles fournissent.

Par exemple, il n'y a que dix variétés fermées euclidiennes (voir [Thu97, p. 231]). Il y a un nombre infini de variétés fermées elliptiques, cependant il existe un entier m pour lequel toute variété elliptique a un revêtement universel avec au plus m feuillets (voir [Thu97, p. 242]). Pour ce qui est des autres géométries, Thurston montre dans [Thu97] comment les sous-groupes en jeu doivent vérifier des qualités fortes. Il ne reste donc plus que la géométrie hyperbolique pour porter la grande majorité des cas.

2 Topologie des surfaces

L'enjeu des deux prochaines sections est le suivant. Je vais tenter d'exposer la classification des surfaces. Pour cela, je vais tout d'abord le faire de façon purement topologique, puis je montrerai comment la géométrie peut s'y allier.

L'intérêt va aussi être de montrer comment la topologie et la géométrie peuvent effectivement être conjointement étudiées. Cela devrait permettre au lecteur de comprendre à quoi ressemble la pratique de la topologie et de la géométrie chez THURSTON.

Bien entendu, THURSTON a produit des travaux très importants en dimension trois, et non en dimension deux. Cependant, THURSTON lui-même dans son exposé ([Thu97] ou encore [Thu02]) met un accent sur le cas des surfaces.

Le cas des surfaces est en effet plus simple à aborder et est parfaitement illustrateur des considérations en jeu.

2.1 Classification topologique

À présent, on va s'intéresser à la classification topologique des surfaces fermées. Sans tenir compte de la géométrisation possible (ce qui sera l'objet de la section suivante), on va exposer clairement de quoi il est question lorsque l'on parle du divers possible des surfaces.

Il ne va pas s'agir ici d'expliquer comment on peut parvenir aux résultats présentés. La question de la classification des surfaces compactes a été largement comprise par la communauté mathématicienne. On pourra par exemple consulter si besoin [GX13] ou [Fom94].

Tout d'abord, il n'est pas inutile d'expliquer pourquoi on va s'intéresser à la topologie des surfaces fermées.

A priori, on pourrait s'intéresser à la question plus large des surfaces compactes. La différence étant donc que ces surfaces peuvent admettre un bord, alors qu'une surface fermée est une surface compacte sans bord. Cependant, le bord d'une surface compacte est une variété compacte de dimension une, donc c'est une union de cercles. Pour chacun de ces cercles, on peut recoller un disque, de sorte que l'on obtienne une surface fermée. Pour retrouver la surface initiale, il suffit de découper des disques. La réduction de la question à celle des surfaces fermées est donc légitime et n'empêche pas d'étudier les surfaces compactes dans leur généralité.

J'ai annoncé en introduction que la classification des surfaces fermées ne ferait intervenir que des outils topologiques. Les invariants topologiques en jeu sont en fait au nombre de deux : la qualité d'orientabilité et la caractéristique d'EULER-POINCARÉ.

L'orientabilité est une qualité assez facile à définir. Si S est une surface, alors par définition, S est localement homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. Cela signifie que si $x \in S$, alors il existe un voisinage de x qui soit homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. Si on fait un tel choix de voisinage, on peut choisir une orientation en x en transposant une orientation de $\mathbf{R}^2$. Il est donc très facile d'orienter localement une surface. L'orientabilité exprime la possibilité de choisir une orientation globale : c'est-à-dire une orientation locale en chaque point qui soit cohérente globalement. En particulier, si S n'est pas orientable, alors il existe des lacets renversant l'orientation (et la réciproque est vraie). Si le tore ou la sphère sont bien orientables, toutes les surfaces ne sont pas orientables : par exemple le plan projectif réel.

La caractéristique d'EULER-POINCARÉ de S est plus subtile à définir, puisque de nombreuses définitions (non trivialement) équivalentes coexistent. Ce qui est commun à toutes ces définitions, c'est que c'est un nombre entier relatif, traditionnellement désigné par $\chi(S)$. Pour des définitions précises on pourra se rapporter par exemple à [Thu97] ou [Bre93]. On retiendra que $\chi(S)$ est un entier. C'est par exemple $+2$ pour la sphère, 0 pour le tore, -2 pour la sphère à deux anses*, $+1$ pour le plan projectif réel et 0 pour la bouteille de KLEIN.

Il y a une manipulation topologique qu'il faut également introduire avant de présenter la classification des surfaces fermées : il s'agit de la somme connexe de deux surfaces. Si S_1 et S_2 sont deux surfaces fermées, alors on peut former leur somme connexe, noté $S_1 \sharp S_2$, de la façon suivante.

On choisit sur chacune de ces surfaces un plongement du disque unité, notés D_1 et D_2. On ôte à S_1 et S_2 l'intérieur de ces disques et on recolle leurs frontières (qui sont des cercles) sur le bord d'un cylindre.

Cette manipulation ne dépend pas des plongements des disques choisis, elle dépend uniquement de la topologie de S_1 et de S_2.

Notons enfin que si S_1 et S_2 produisent la somme connexe $S_1 \sharp S_2$, alors on peut calculer la caractéristique d'EULER-POINCARÉ de $S_1 \sharp S_2$ avec l'égalité $\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. L'orientabilité de la somme connexe dépend de l'orientabilité des facteurs : si S_1 et S_2 sont orientables alors $S_1 \sharp S_2$ l'est aussi ; si S_1 ou S_2 n'est pas orientable, alors $S_1 \sharp S_2$ n'est pas orientable.

Le théorème de classification des surfaces fermées est le suivant. Si S est une surface fermée, alors S est homéomorphe ou bien à la sphère, ou bien à la somme connexe de copies de tores, ou bien à la somme connexe de copies du plan projectif réel.

Si S est orientable et si $\chi(S) = 2-2g$, alors S est homéomorphe à la somme de g tores si $g > 0$ et est homéomorphe à la sphère si $g = 0$.

Si S est non orientable et si $\chi(S) = 2-k$, alors $k > 0$ et S est homéomorphe à la somme de k plans projectifs réels.

On retiendra deux choses de cette classification. Tout d'abord, deux suites de sommes connexes décrivent totalement les surfaces fermées : les sommes de tores et les sommes de plans projectifs réels. Cette énumération est élémentaire à décrire et est propre au cas de la dimension deux : en dimension supérieur il n'existe pas de telle énumération.

Enfin, la caractéristique d'EULER-POINCARÉ d'une surface, $\chi(S)$, est toujours au plus égale à 2. Il n'y a que quatre cas particuliers ayant $\chi(S) \geq 0$, il s'agit de la sphère, du tore, du plan projectif réel et de la bouteille de KLEIN

*. Appelé aussi vulgairement le « tore à deux trous », bien qu'un tore n'ait pas de trou puisque c'est une surface complète.

(qui est la somme connexe de deux plans projectifs réels). La majorité des surfaces vérifient donc $\chi(S) < 0$. Ces surfaces sont dites *hyperboliques*, et ce sera l'objet de la section suivante.

2.2 Géométrie des surfaces

Le but de cette section est d'expliquer comment on peut articuler des considérations géométriques dans la question de la classification des surfaces fermées, telle que présentée dans la section précédente.

Il va s'agir de montrer comment on peut transformer ce problème topologique en un problème de géométrie, permettant ainsi de comprendre d'une part la signification de l'hyperbolicité de certaines surfaces et d'autre part pourquoi cela fait sens de se centrer sur l'étude de ces surfaces hyperboliques dans l'objectif de comprendre plus finement la topologie et la géométrie des surfaces.

La pierre angulaire sera l'introduction de la question du pavage du plan par des polygones réguliers. Nous verrons comment cette question justifie l'apparition du plan hyperbolique.

Pour me ramener au pavage du plan par des polygones réguliers, je vais expliquer ici comment ramener la description d'une surface fermée à un polygone et comment le pavage peut exprimer la topologie de cette même surface.

On appelle polygone fondamental la donnée d'un polygone et de la prescription du recollement de ses côtés. Par exemple la figure 2.1 donne un polygone fondamental pour le tore. Si l'on recolle les côtés opposés du carré en respectant les orientations indiquées par les flèches, on obtient bien un tore. Ce tore est dit plat car il est obtenu à partir d'un carré du plan euclidien, qui est plat (au sens de la courbure). *

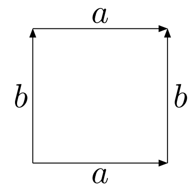

FIGURE 2.1 – Le tore plat.

Il n'y a pas qu'un seul polygone fondamental donnant topologiquement le tore. On pourrait par exemple renverser simultanément toutes les flèches, ou renverser une paire de flèches associées. Cela ne changerait pas le résultat et donc ne changerait pas la topologie de la surface obtenue. On peut aussi obtenir ce tore à partir d'un autre polygone régulier, par exemple, on peut l'obtenir à

*. Il faut comprendre par là que le recollement des côtés que l'on pratique à la main dans l'espace tridimensionnel euclidien ne correspond pas tout à fait au résultat : un tore plat aura bien une courbure nulle alors qu'un tore usuel a des points de courbure positive, d'autres de courbure nulle et d'autres de courbure négative.

partir d'un polygone fondamental formé sur l'hexagone, comme montré figure 2.2.

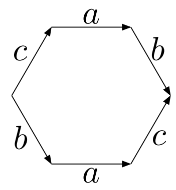

FIGURE 2.2 – Le tore plat obtenu par recollement d'un hexagone.

De façon générale, on peut décrire toute surface fermée par un polygone fondamental. * Par exemple, si on considère la sphère à deux anses, alors on peut la décrire par un octogone comme montré figure 2.3.

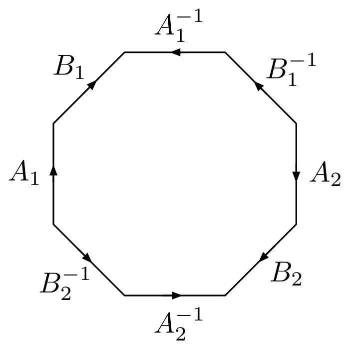

FIGURE 2.3 – La sphère à deux anses.

La nomenclature doit se comprendre de la façon suivante. Étant donné un polygone régulier P, on commence par orienter l'intérieur de P. Sur chaque arrête, on choisit une orientation qui est soit compatible avec celle de P, soit incompatible avec celle de P. Si A est une arrête alors on indique par A l'arrête orientée de façon compatible avec P et par A^{-1} celle d'orientation contraire. Il faut enfin effectuer le pairage des arêtes. Chaque couple d'arêtes est désigné par le même symbole.

De sorte qu'un polygone fondamental peut être résumé par la suite de ses arêtes. Par exemple le polygone de la figure 2.3 peut être donné par : $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1}$.

Plus généralement, si S est la surface obtenue par somme connexe de g tores, alors elle peut-être obtenue par le polygone fondamental suivant : $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}\cdots A_gB_gA_g^{-1}B_g^{-1}$. Si S est la surface obtenue par la somme de k plans projectifs réels, alors on peut la décrire par le polygone fondamental $A_1B_1A_1B_1\cdots A_kB_kA_kB_k$ qui s'avère être le même polygone fondamental que $A_1A_1\cdots A_kA_k$. †

∗. Le lecteur mathématicien pourrait utiliser le fait que toute surface est triangulable et qu'on peut déduire d'une triangulation un polygone fondamental.

†. La sphère, quant à elle, peut être obtenue par le polygone fondamental à deux côtés AA^{-1}.

Maintenant que nous avons décrit toutes les surfaces topologiques par des polygones fondamentaux ayant toujours un nombre pair de côtés, il nous reste à amorcer la discussion géométrique faisant le lien entre ces polygones, le pavage du plan et l'hyperbolicité.

Pour cela, la façon la plus naturelle pour un mathématicien consiste à chercher le revêtement universel d'une surface. Nous n'allons pas insérer ce vocabulaire par souci de clarté, mais le mathématicien y reconnaîtra instantanément l'objectif.

Si P est un polygone fondamental, alors on a vu que la surface S associée est obtenue en identifiant les côtés de P. Maintenant, supposons un instant que l'on puisse paver le plan par le polygone P. Par exemple, pavons le plan euclidien par des carrés, comme représenté par la figure 2.4.

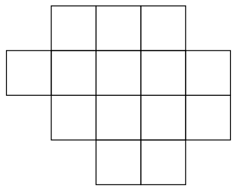

FIGURE 2.4 – Pavage du plan par des carrés.

On peut alors reconnaitre la surface S comme étant le quotient du plan par le groupe des symétries induites par le pavage. Dans le cas du tore plat, on peut le voir comme étant le quotient du plan euclidien, $\mathbf{R}^2$, par le groupe des translations horizontales et verticales $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Plus généralement, tout polygone fondamental donne un groupe de symétrie du plan qu'il pave.

Dans le cas du plan, il n'y a que deux polygones réguliers à un nombre pair de côtés qui puissent le paver : le carré et l'hexagone (voir figure 2.5). Ce n'est donc pas un hasard si le tore plat peut aussi être décrit par un polygone fondamental fondé sur l'hexagone.

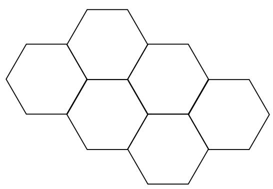

FIGURE 2.5 – Pavage du plan par des hexagones.

Que dire de l'octogone donnant le polygone fondamental de la sphère à deux anses (figure 2.3) ? Il s'avère qu'il n'est même pas possible de coller trois octogones, voir figure 2.6.

En effet, pour pouvoir rassembler huit octogones autour d'un sommet, il faudrait que l'angle intérieur entre deux arêtes soit égal à $2\pi/8 = \pi/4$, pourtant l'angle intérieur entre deux arêtes d'un octogone fait $3\pi/4$ (ce qui explique qu'on ne peut même pas rassembler trois octogones).

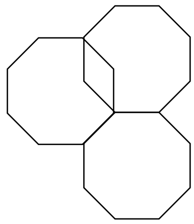

Figure 2.6 – Impossible de paver le plan par des octogones.

Il est nécessaire de pouvoir mettre huit octogones autour d'un même sommet puisque les symétries données par le polygone fondamental font intervenir quatre paires d'arêtes autour de chaque sommet (qui est en fait un seul même sommet après identification, plus de détails sont donnés dans [Thu97]).

C'est ici qu'intervient le plan hyperbolique. Dans le plan hyperbolique, on peut faire en sorte que l'angle intérieur soit plus petit. De sorte que l'on peut obtenir des octogones ayant des angles intérieurs précisément égaux à $\pi/4$. On obtient le pavage de la figure 2.7.

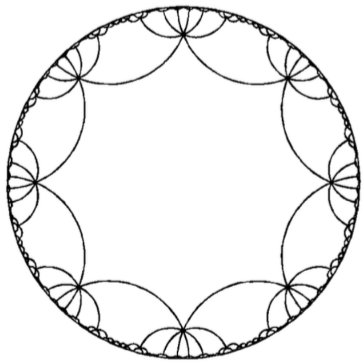

Figure 2.7 – Pavage du plan hyperbolique par des octogones (huit autour de chaque sommet). Source : [Thu97].

Plus généralement, dans le plan hyperbolique, on peut agrandir les polygones réguliers en envoyant les sommets vers l'infini. Cela a pour effet de diminuer l'angle intérieur, autant que désiré puisque l'angle donné par les sommets une fois placés à l'infini est nul. Finalement, un polygone régulier à $2n$ côtés avec $n > 2$, a ses angles intérieurs compris entre la limite supérieure qui est $2(n-1)\pi/2n = (n-1)\pi/n$ et 0, et pourra donc toujours paver le plan hyperbolique en demandant n polygones autour de chaque sommet.

Comme toutes les surfaces ayant $\chi(S) < 0$ sont données par des polygones à $2n$ côtés avec $n > 2$, on en déduit que tous ces polygones pavent le plan hyperbolique. Les polygones fondamentaux des surfaces ayant $\chi(S) \geq 0$ ne peuvent pas paver le plan hyperbolique.

En conclusion, on retiendra que toutes les surfaces, à l'exception de celles ayant $\chi(S) \geq 0$, peuvent être données par un polygone fondamental qui pave le plan hyperbolique. Ce pavage, le groupe des symétries induites par le polygone fondamental reconstituent la surface initiale.

Ainsi, les surfaces ayant $\chi(S) < 0$ sont hyperboliques car quotient du plan hyperbolique par un sous-groupe du groupe des symétries du plan hyperbolique. Ce sous-groupe, c'est aussi le groupe fondamental de S. Réciproquement, deux sous-groupes différents donnent deux surfaces distinctes (car les groupes fondamentaux sont alors distincts). Donc la classification des surfaces hyperboliques est équivalente à la comparaison des sous-groupes du groupe des symétries du plan hyperbolique.

2.3 Sur les polygones

Il y a une question légitime qui s'impose à nous : quel est le sens de l'expression « un polygone du plan hyperbolique » ?

En introduction de ce mémoire, nous avions interrogé le sens des triangles en géométrie non-euclidienne. Mais la discussion doit être poursuivie maintenant que nous avons le cadre conceptuel précis à notre disposition.

Je pourrais proposer une définition abstraite d'un polygone, et donc placer le sens de cette discussion dans la question de la définition des objets, reprenant alors assez fidèlement la discussion proposée en introduction.

Mais il me semble qu'il est plus intéressant de s'intéresser à la question suivante : pourquoi acceptons-nous l'usage de polygones du plan hyperbolique au même titre que les polygones du plan euclidien ?

Il me semble que la réponse doit être trouvée dans la façon par laquelle ces polygones sont employés, plutôt que dans la façon par laquelle ils sont définis.

Ce qui est important lors d'un pavage du plan (qu'il soit euclidien ou hyperbolique) c'est la possibilité de décrire le plan par une figure qui est répétée de façon symétrique et de sorte à recouvrir le plan.

Après tout, pour illustrer le pavage du plan par des carrés (figure 2.4), il ne m'a pas été nécessaire de vous montrer un plan et une couverture de celui-ci par des carrés, il m'a seulement été nécessaire de vous montrer quelques carrés et la façon par laquelle ils étaient disposés de sorte à ce que la répétition du motif se fasse sans ambiguïté et sans difficulté majeure.

Mathématiquement, il s'agissait de décrire le sous-groupe des symétries du plan employé dans la construction du pavage. Il s'agissait de fournir le groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ des translations verticales et horizontales. Mais alors, la même chose peut être pensée indépendamment de la nature du plan : on peut très bien considérer les sous-groupes du groupes des symétries du plan hyperbolique. [*]

Ce faisant, nous avons métamorphosé la question initiale en une question de théorie des groupes. On y relèvera peut-être le signe d'une application du programme d'Erlangen, mais il me semble que le plus important n'est pas là.

*. Bien entendu, ça n'est pas la seule condition à vérifier : ce sous-groupe doit avoir une action particulière sur le plan, de sorte à ce que le quotient obtenu soit bien une variété.

Le plus important dans cette histoire, et ce sera quelque chose que nous rencontrerons à plusieurs reprises, est que la question de l'interprétation des figures naturelles[†] ne se pose que rarement lors de la pratique mathématique. Ce qui prime, c'est l'usage qui est fait et son bien fondé mathématique.

Cela a plusieurs conséquences : des concepts mathématiques sont utilisés sans que la question de l'interprétation ne se pose ; et ils sont utilisés du fait de leur intérêt dans la pratique.

Par exemple, nous rencontrerons par la suite des groupes de Lie. Il ne viendrait pas à l'esprit du mathématicien de questionner le bien fondé de l'utilisation de ces groupes, à partir du moment où leur usage est correct mathématiquement et qu'il apporte des résultats. C'est une discussion philosophique que de chercher la fondation de la méthode géométrique.[*]

On retiendra principalement pour notre étude que l'étude de la géométrie contemporaine ne doit pas se faire en tentant d'abstraire une méthode propre aux géomètres. Cette méthode, même si on croirait en trouver des traces, ne saurait être bien fondée du fait que le mathématicien contemporain ne s'en soucie guère (et c'est vérifiable dans les corpus : il n'en n'est jamais fait mention et c'est donc que la question des méthodes employées n'est pas critique). En ce sens, étudier la géométrie contemporaine sous l'éclairage du programme d'Erlangen serait croire que les mathématiciens se préoccupent de l'appliquer, alors que ça n'est pas le cas.

Il n'est pas inutile de rappeler que Perelman a démontré la conjecture de géométrisation de Thurston en employant des outils bien différents de ce que ce dernier avait apporté. Thurston lui-même avait souligné la difficulté qu'il y aurait à continuer d'utiliser la théorie qu'il avait apportée, et qu'il faudrait probablement inventer de nouveaux outils, ce qui a effectivement été le cas. Si la question de la méthode géométrique se posait sérieusement, il aurait paru difficile que des outils aussi différents soient utilisés pour une même question. Cela aurait au moins fait l'objet d'un débat, mais qui n'a jamais eu lieu.

3 Topologie en dimension trois

On pourrait critiquer à mon approche le fait qu'elle appose un point de vue géométrique à une situation topologique qui peut être traitée de façon purement topologique. Cette critique est légitime si on restreint notre champ de vision aux surfaces, mais n'est plus valable si l'on prend en compte la question de la classification des variétés tridimensionnelles.

Je vais tenter ici d'exposer des arguments topologiques quant à l'empêchement d'une étude purement topologique de la classification topologique des variétés (lisses) fermées de dimension trois.

†. J'entends par là les figures dont nous avons une idée issue de notre habitude à la géométrie euclidienne.

∗. C'est là un phénomène de la géométrie contemporaine bien différent de la géométrie euclidienne où la justification de la méthode était l'un des enjeux majeurs dans la pratique même des mathématiques.

Cette partie sera donc mathématiquement plus élaborée, mais le lecteur retiendra principalement que les outils topologiques sont insuffisants pour l'étude des variétés de dimension trois.

Quels sont les outils topologiques à notre disposition lorsque l'on étudie les variétés lisses ? Ceux qui découlent de la structure d'espace topologique sont les suivants : les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie (les groupes de cohomologie sont duaux à ceux d'homologie par dualité de POINCARÉ).

Prenons par exemple le groupe fondamental, $\pi_1(M)$, d'une variété lisse fermée. Pour calculer $\pi_1(M)$, nous avons principalement à notre disposition le théorème de VAN KAMPEN qui permet de calculer le groupe fondamental en fonction d'une décomposition de M. Mais cette décomposition est difficile à trouver sans des considérations particulières sur M. Par exemple, on serait bien en mal de calculer $\pi_1(M)$ sans plus d'information que la structure de variété différentielle.

Les autres groupes d'homotopies sont, eux, très difficiles à calculer. Mais il s'avère que la topologie des variétés de dimension trois ne dépend en réalité que du premier groupe.

Pour ce qui est des groupes d'homologie, il y en a quatre qui sont potentiellement non triviaux. Une fois de plus, leur calcul demande une décomposition de M.

Des outils topologiques nous viennent également de la structure différentiable. Ils consistent essentiellement à étudier le fibré tangent d'une variété lisse fermée M, τ_M.

Ces outils sont les classes caractéristiques de τ_M. Mais les classes caractéristiques d'une variété fermée orientée de dimension trois sont toujours triviales (voir [MS74]). En effet, un théorème de STIEFEL montre que τ_M est toujours un fibré trivial lorsque M est fermée, orientable et de dimension trois. Donc, en réalité, n'importe quel invariant topologique de τ_M est trivial.

En particulier, la caractéristique d'EULER-POINCARÉ, qui est l'un des invariants que l'on peut calculer à partir des classes caractéristiques, est toujours nul. Alors que cet invariant était essentiel à la classification des surfaces, il n'apporte aucune information dans notre cas.

Ainsi, alors que la structure différentiable était riche en informations topologiques dans le cas des surfaces, ça n'est plus du tout aussi évident en dimension trois. Si l'on s'en tient à la structure du fibré tangent, on n'obtient aucune information dans bien des cas (à chaque fois que M est orientable).

La plupart des invariants topologiques sont ou bien nuls, ou bien calculables une fois que l'on connait une décomposition particulière. Il faut donc une analyse plus fine des variétés différentiables de dimension trois. Cela se fait toujours par l'ajout de structures supplémentaires, et ça n'est donc pas un hasard si on engage des outils géométriques dans cette étude.

Chapitre 3

Objets géométriques et géométries modèles

Nous avons vu au chapitre précédent (commençant page 21) comment Thurston explique ce qu'il appelle *une géométrie*. Cependant, ça n'est pas suffisant pour rendre totalement compte du concept de géométrie chez cet auteur, et plus généralement dans les mathématiques contemporaines.

En effet, Thurston définit dans les développements cités – en particulier le développement qui figure en annexe 2-A – quelles sont les propriétés que doivent posséder les géométries servant de *modèles*. Cependant, la question de ce que sont les objets de ces géométries n'est pas discutée dans ces passages.

Suivant Thurston (voir l'annexe 2-A), une géométrie modèle est une paire (G, X) constituée d'une variété X et d'un groupe de Lie, G, de difféomorphismes de X. Étant donnée une telle paire, il reste à expliquer comment on peut construire des objets géométriques.

Qu'en est-il dans les autres branches de la géométrie ? S'il est difficile de donner exhaustivement une description des façons par lesquelles sont formés les objets des géométries, on peut en revanche établir un deuxième exemple qui nous servira d'appui pour soutenir une hypothèse.

Cette hypothèse est la suivante : *(H) La géométrie se discerne par le fait qu'elle articule géométries modèles et objets géométriques modelés sur ces premières.*

Nous donnerons un deuxième exemple, en géométrie algébrique. Nous verrons que la notion de schéma, introduite par Grothendieck, vérifie elle aussi cette hypothèse.

Ainsi, dans l'objectif de soutenir cette hypothèse, je commencerai par étudier les écrits de Thurston en m'intéressant à la façon par laquelle il établit les objets géométriques qu'il considère.

Ensuite, je préciserai comment la notion de schéma donne elle aussi lieu à une articulation entre les géométries modèles et les objets géométriques modelés. Le traitement systématique de cette hypothèse sera effectué au chapitre suivant.

1 Objets géométriques

Le but de cette section est d'établir ce qu'un objet géométrique est pour Thurston. Pour ce faire, nous allons revenir à ce que Thurston se donne pour but : la conjecture de géométrisation. Nous verrons comment Thurston articule cette conjecture avec deux notions : celle de (G, X)-variété et celle de géométrie modèle.

Jusqu'à présent, nous n'avons abordé que la question des géométries modèles. Par une discussion commençant par "What is a geometry ?", Thurston explique comment il donne naissance à la notion de *géométrie modèle* (voir annexe 2-A pour la définition formelle).

Le travail suivant va donc consister à expliquer comment Thurston articule la notion de géométrie modèle avec la conjecture de géométrisation. En d'autres termes, il nous faut expliquer comment les variétés peuvent être mises en adéquation avec la notion de géométrie modèle.

Une fois que nous aurons établi ce rapport entre variétés et géométries modèles, il nous restera à expliquer comment s'articule la notion de (G, X)-variété avec cette première articulation. Nous verrons en particulier que la notion de (G, X)-variété porte en fait la conception d'objet géométrique. Et que, si M est une variété (suffisamment simple) de dimension trois, la conjecture de Thurston consiste en réalité à donner à M une structure de (G, X)-variété où (G, X) correspond à l'un des huit modèles.

Suivant ce programme, on pourra ainsi en conclure qu'une (G, X)-variété est non seulement une notion plus générale que celle de variété, mais que sa restriction à des couples (G, X) déterminés par les huit géométries permet d'exprimer la rigidité en question dans la conjecture de Thurston.

On conclura aussi que la conjecture de Thurston porte directement sur la dialectique entre d'une part les couples (G, X) et d'autre part les variétés lisses sur lesquelles on tente d'accoler une (G, X)-structure.

1.1 La conjecture de géométrisation

Commençons par revenir à la conjecture de géométrisation. Cette conjecture est exposée dans [Thu82]. Ce qui va nous intéresser, c'est la manière par laquelle Thurston introduit la notion de *géométrie modèle*, que nous avons déjà présentée en section 1 du chapitre 2, bien que sa formulation technique ne soit en fait présente qu'en annexe 2-A.

Dans [Thu82], on lit [*] :

> One way to think of a geometric structure on a manifold M is that it is given by a complete, locally homogeneous Riemannian metric. It is better, however, to define a geometric structure to be

∗. Une fois de plus, on trouvera la citation complète en annexe, ici l'annexe 2-B.

> a space modelled on a homogeneous space (X, G), where X is a manifold and G is a group of diffeomorphisms of X
>
> [...]
>
> There are precisely eight homogeneous spaces (X, G) which are needed for geometric structures on 3-manifolds.

Cette citation permet de mieux situer la nature géométrique. Là où habituellement on considère que la géométrie sur une variété est exprimée par une métrique riemannienne (voir le chapitre 2, section 1), Thurston propose d'orienter différemment la question. Il propose que nous comprenions la géométrie d'une variété comme le fait d'être modelé sur un espace (homogène).

Il n'est pas inutile à ce stade de rappeler deux éléments déjà évoqués au chapitre précédent.

Tout d'abord, il nous faut absolument rappeler que Thurston s'intéresse à une classification topologique, bien qu'elle se fasse par un point de vue géométrique.

Aussi, nous avons vu comment les surfaces pouvaient porter une information géométrique selon leur classification. Essayons en particulier de comprendre cette citation dans le cas des surfaces, afin de fixer nos idées.

Si M est une surface (fermée), alors je pourrais considérer qu'une donnée géométrique sur M soit une métrique riemannienne. Par exemple, si M est un tore (topologique), alors des métriques riemanniennes il y en a des très différentes. Par exemple celle correspondant au tore plat (ayant une courbure partout nulle) ou celle correspondant au tore $S^1 \times S^1$ (ayant des points où la courbure est nulle, strictement positive, ou encore strictement négative). Ces deux métriques sont déjà qualitativement différentes : elles ne peuvent pas être égales à multiplication d'un scalaire près, puisque la courbure ne peut changer de la sorte. On se retrouve donc à avoir une surface M possédant possiblement une grande famille de métriques riemanniennes non compatibles.

Le point de vue que propose Thurston, c'est de considérablement réduire le nombre de métriques possibles. Et cela, on le fait en demandant une présentation de M particulière. Par exemple, nous avons vu dans le cas des surfaces, que M est modelée ou bien sur la géométrie elliptique, ou bien sur la géométrie euclidienne, ou bien sur la géométrie hyperbolique. Si M est le tore (topologique), alors on a vu que M est modelé sur la géométrie euclidienne. Cette fois-ci, l'information géométrique sur M est bien plus simple : il y a un candidat naturel pour une métrique riemannienne sur M : celui provenant de la géométrie euclidienne. En particulier, la géométrie naturelle au sens de Thurston sur le tore, c'est celle donnant le tore plat. Le point crucial étant l'unicité de la géométrie sur laquelle le tore peut être modelé. *

C'est ce schéma que Thurston souhaite établir dans le cas des variétés

*. Unicité qui peut être démontrée de plusieurs façons, la formule de Gauss-Bonnet en étant une.

de dimension trois. Là où l'on pourrait se contenter de supposer que M est munie d'une métrique riemannienne et d'en étudier les propriétés, THURSTON propose plutôt de chercher quelle est la géométrie modèle sur laquelle M est modelée.

Ainsi, THURSTON n'a plus qu'à présenter la notion de géométrie modèle. Pour cela, on peut lire la suite de la citation de l'article [Thu82] en annexe 2-B, ou bien reprendre la discussion "What is a geometry ?" abordée au premier chapitre et dont la citation complète est en annexe 2-A.

1.2 Les (G, X)-variétés

Nous avons donc vu comment THURSTON propose de comprendre la géométrie d'une variété : *c'est par la géométrie modèle sur laquelle elle est modelée.* Et le contenu de la conjecture consiste à pouvoir énumérer fidèlement ces géométries modèles.

Mais il n'est pas satisfaisant de s'arrêter là. En effet, il nous faut absolument préciser ce que signifie « la géométrie modèle sur laquelle elle est *modelée* ». Le fait de pouvoir modeler une variété sur une géométrie dite « modèle », c'est là une notion qui est nouvelle dans notre exposé.

Nous allons voir que c'est la notion de (G, X)-variété qui porte cette conception. Nous verrons par quelques remarques comment elle peut s'articuler avec le concept de variété et avec les trois géométries modèles déjà à notre connaissance.

La notion de (G, X)-variété généralise celle de variété. Pour aller plus en détails, partons du texte de THURSTON. Je cite ici un extrait du chapitre trois de [Thu02, p. 27], on retrouvera l'intégralité de la citation en annexe 2-C. Pour un texte mathématique plus élaboré (et ayant une correction légère), on se reportera à l'exposé de [Thu97] que je reporte en annexe 2-C.

> A manifold is a topological space which is locally modelled on $\mathbf{R}^n$. The notion of what it means to be locally modelled on $\mathbf{R}^n$ can be made definite in many different ways, yielding many different sorts of manifolds. In general, to define a kind of manifold, we need to define a set $\mathcal{G}$ of gluing maps which are to be permitted for piecing the manifold together out of chunks of $\mathbf{R}^n$. Such a manifold is called a $\mathcal{G}$-manifold. $\mathcal{G}$ should satisfy some obvious properties which make it a *pseudogroup* of local homeomorphisms between open sets of $\mathbf{R}^n$:
>
> (i) The restriction of an element $g \in \mathcal{G}$ to any open set in its domain is also in $\mathcal{G}$.
>
> (ii) The composition $g_1 \circ g_2$ of two elements of $\mathcal{G}$, when defined, is in $\mathcal{G}$.
>
> (iii) The inverse of an element of $\mathcal{G}$ is in $\mathcal{G}$.

(iv) The property of being in $\mathcal{G}$ is local, so that if $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ and if g is local homeomorphism $g\colon U \to V$ whose restriction to each U_α is in $\mathcal{G}$, then $g \in \mathcal{G}$.

It is convenient also to permit $\mathcal{G}$ to be a pseudogroup acting on *any* manifold [...]

A group G acting on a manifold X determines a pseudogroup which consists of restrictions of elements of G to open sets in X. A (G, X)-manifold means a manifold glued together using this pseudogroup of restrictions of elements of G.

Sans plus attendre, donnons cinq exemples, tirés du chapitre trois de [Thu97]. Les deux premiers correspondent au cas où $\mathcal{G}$ est un pseudogroupe d'homéomorphismes locaux de $\mathbf{R}^n$. Les trois suivants sont ceux correspondants aux géométries modèles euclidienne, elliptique et hyperbolique.

Example 3.1.3 (differentiable manifolds). If $\mathcal{C}^r$, for $r \geq 1$, is the pseudogroup of C^r diffeomorphisms between open sets of $\mathbf{R}^n$, a $\mathcal{C}^r$-manifold is called a differentiable manifold (of class C^r), or a C^r manifold. A $\mathcal{C}^r$-isomorphism is called a diffeomorphism. C^∞ manifolds are also called *smooth manifolds*.

Example 3.1.9 (foliations). Write $\mathbf{R}^n$ as the product $\mathbf{R}^{n-k} \times \mathbf{R}^k$ and let $\mathcal{G}$ be the pseudogroup generated by diffeomorphisms ϕ (between open subsets of $\mathbf{R}^n$) that take horizontal factors to horizontal factors, that is, diffeomorphisms that have the form

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(y)),$$

for $x \in \mathbf{R}^{n-k}$ and $y \in \mathbf{R}^k$. The pseudogroup $\mathcal{G}$ consists of all diffeomorphisms between open sets of $\mathbf{R}^n$ whose Jacobian at every point is an $n \times n$ matrix such that the lower left $(n-k) \times k$ block is 0. A $\mathcal{G}$-structure is called a *foliation* of codimension k (or dimension $n-k$). To visualize a foliation one should think not of local coordinate charts, but of the inverse images of factors $\mathbf{R}^{n-k} \times \{y\}$ under the charts, which piece together globally to give the *leaves* of the foliation.

Example 3.3.2 (Euclidean manfiolds). If G is the group of isometries of Euclidean space $\mathbf{E}^n$, a $(G, \mathbf{E}^n)$-manifold is called a *Euclidean*, or *flat*, manifold ; the structure of these manifolds is what we discussed informally in Section 1.1. As we saw in Section 1.3, the torus and the Klein bottle are the only compact two-dimensional manifolds that can be given Euclidean structures, but they have many such structures. *

*. Il faut bien sûr comprendre ici "many such [Euclidean] structures".

> **Example 3.3.5 (elliptic manifolds).** If G is the orthogonal group $O(n+1)$ acting on the sphere S^n, a (G, S^n)-manifold is called *spherical*, or *elliptic*. The Poincaré dodecahedral space (Example 1.4.4) and lens spaces (Example 1.4.6) are spherical manifolds.
>
> **Example 3.3.6 (hyperbolic manifolds).** If G is the group of isometries of hyperbolic space $\mathbf{H}^n$, a $(G, \mathbf{H}^n)$-manifold is a *hyperbolic manifold*. We discussed hyperbolic surfaces in Section 1.2 and a three-dimensional example, the Seifert-Weber dodecahedral space, in Example 1.4.5.

Ces exemples ont une double utilité dans cet exposé. Tout d'abord, j'espère qu'ils permettront une plus grande clarté. Aussi, ils devraient convaincre le lecteur que la notion de (G, X)-variété permet une grande généralité dans les objets géométriques atteints. (En particulier, toutes les variétés différentielles sont des (G, X)-variétés.)

C'est véritablement la notion de (G, X)-variété qui correspond au concept d'objet géométrique chez Thurston. En effet, nous avons vu que c'est un enjeu principal pour Thurston, à travers la conjecture de géométrisation, que de chercher à montrer que toute variété possède une structure de (G, X)-variété, où (G, X) correspond à un modèle parmi les huit géométries modèles.* La notion de (G, X)-variété est donc celle sur laquelle la géométrie de Thurston opère.

Il reste à décrire ce qu'on entend par « où (G, X) correspond à un modèle parmi les huit géométries modèles ». Pour cela, il faut examiner la conjecture de géométrisation. Reprenons la lecture de l'article [Thu82]. On y lit, aux côtés de la citation partielle reportée précédemment, le passage suivant, reporté avec le reste en annexe 2-B.

> If X is simply-connected, [it] says that M must be of the form X/Γ, where Γ is a discrete subgroup of G without fixed points.
>
> There are precisely eight homogeneous spaces (X, G) which are needed for geometric structures on 3-manifolds.

Et s'ensuit la description axiomatique des géométries modèles telle que déjà présentée au chapitre 2, et que l'on peut retrouver ou bien dans sa version de l'article en annexe 2-B, ou bien dans sa version du livre [Thu97] reportée en annexe 2-A.

1.3 Synthèse

Il n'est peut-être pas inutile à ce stade de synthétiser la présentation mathématique ainsi que l'articulation conceptuelle.

*. Notons que Thurston établit la liste des huit modèles sur la base de sa conception de ce qu'est une géométrie. En effet, la preuve (voir [Thu97]) qu'il formule de l'énumération des huit géométries se fait sur la base de la définition qu'il propose.

Nous avons une notion de géométrie modèle, qui permet de préciser ce que l'on entend par « géométrie » chez Thurston. Cette notion de géométrie modèle donne des (G, X)-variétés où (G, X) est une géométrie modèle. Ce sont les objets des différentes géométries.

La notion de variété lisse peut être transposée en termes de (G, X)-variété. La conjecture de géométrisation consiste à pouvoir donner à toute variété lisse (suffisamment simple) de dimension trois une structure de (G, X)-variété, où (G, X) est l'une des huit géométries modèles, bien plus rigides que la structure de variété lisse.

2 Schémas en géométrie algébrique

Changeons à présent de théorie, intéressons nous à ce qui se fait en géométrie algébrique. Dans cette section [*], nous allons nous intéresser à la question suivante : y a-t-il une telle notion de « modelage » en géométrie algébrique ?

Je vais tenter d'expliquer pourquoi la notion de schéma, introduite par Grothendieck, exprime une fois de plus une conception de la géométrie par modelages d'objets sur des modèles : les spectres des anneaux.

Pour cela, je vais exposer en partie le formalisme des schémas, et tenter d'en tirer les éléments conceptuels allant dans le sens de la question ci-dessus.

Ma source principale sera [Sha10], qui propose un discours suffisamment clair pour être découpé (les Éléments de Géométrie Algébrique, en particulier [Gro60], de Grothendieck sont très difficilement lisibles pour un tel exposé).

Malheureusement, la géométrie algébrique étant un domaine techniquement élaboré et assez éloigné de tout ce que l'on a exposé jusqu'à présent, je ne peux me permettre d'exposer dans le détail et en termes simples l'ensemble des éléments abordés par la suite. Je ne peux que conseiller au lecteur les tomes de Shafarevich.

Il m'est aussi trop difficile de donner le contexte précis dans lequel les passages qui vont suivre s'inscrivent. On gardera à l'esprit que lorsque le mot « géométrie » apparaîtra, ça ne sera pas nécessairement dans le même sens que lorsque nous lisions les travaux de Thurston.

2.1 Spectre d'un anneau

Il y a une notion que je me dois absolument d'exposer, c'est celle du spectre d'un anneau. En fait, cette notion jouera un rôle similaire à celui de géométrie modèle, pour des raisons qui seront expliquées par la suite.

Heureusement pour cet exposé, Shafarevich propose dans [Sha10] une introduction à la définition de spectre. Voici les passages que j'ai décidé de citer, on retrouvera l'intégralité de cette introduction en annexe 2-D.

---

*. Malheureusement mathématiquement plus difficile à appréhender pour le non mathématicien.

> We consider a ring A, always assumed to be commutative with 1, but otherwise arbitrary. We attempt to associate with A a geometric object. [...] This object will at first only be defined as a set, but we will subsequently give it a number of other structures, for example a topology, which should justify its claim to be geometric.
>
> [...]
>
> In the case that $A = k[X]$ is the coordinate ring of an affine variety X, the set of prime ideals of A has a clear geometric meaning : it is the set of irreducible closed subvarieties of X (points, irreducible curves, irreducible surfaces, and so on). Finally, for a very large class of rings the set of prime ideals is determined by the set of maximal ideals (see Exercise 8). All of this motivates the following definition.
>
> **Definition** The set of prime ideals of A is called its *prime spectrum* or simply *spectrum*, and denoted by $\operatorname{Spec} A$. Prime ideals are called *points* of $\operatorname{Spec} A$.

Il est intéressant de noter ici l'expression : " *This object will at first only be defined as a set, but we will subsequently give it a number of other structures, for example a topology, which should justify its claim to be geometric.* ", dont on pourrait se demander ce qu'elle signifie aux yeux de notre étude.

L'expression « être géométrique » employée par SHAFAREVICH n'est pas discutée de façon plus explicite, mais il semble qu'il s'agisse du sens suivant : un objet est géométrique s'il possède certaines structures, dont une topologie. Et c'est effectivement un phénomène que nous retrouverons : la plupart des objets géométriques considérés dans ce mémoire ont une topologie et ont une structure spéciale (une géométrie modèle, pour ne citer que celle-là).

Est-ce qu'il y a un phénomène notable au fait de posséder une topologie ? Il semblerait que, questionné ainsi, non. Du fait que l'on peut toujours donner une topologie à un ensemble, ça n'est pas un phénomène propre aux objets géométriques que de posséder une topologie.

Cependant, la plupart du temps, on n'associe pas n'importe quelle topologie à un objet mathématique. La topologie provient souvent de la construction même de cet objet : topologie *induite*, topologie *quotient*, pour ne citer qu'elles. Mais il s'agit là de topologies issues d'une relation entre l'objet géométrique et un modèle, ce qui va bien dans le sens de notre étude. [*]

Je me dois à présent d'explorer un exemple, de sorte à ce que le lecteur moins spécialiste puisse saisir un peu l'essence de cette définition.

∗. Parfois, la topologie d'un objet est définie de façon plus intrinsèque, et c'est le cas lorsque l'on donne une topologie à un spectre. Mais il faut garder à l'esprit que cette topologie a été construite de sorte à correspondre à une utilisation dans des cas déjà connus. Il faut bien que les définitions construites permettent de reprendre des résultats déjà connus de la géométrie, comme par exemple dans les cas des variétés algébriques les plus communes (les variétés réelles ou complexes sans singularité, par exemple).

Considérons l'équation polynomiale

$$(x-1)(x^2+y^2)=0.$$

Dans $\mathbf{R}^2$, muni des coordonnées (x,y), une résolution élémentaire montre que cette équation correspond à l'union du point $(0,0)$ avec la droite $x=1$ (voir figure 3.1). On appellera cette variété X.

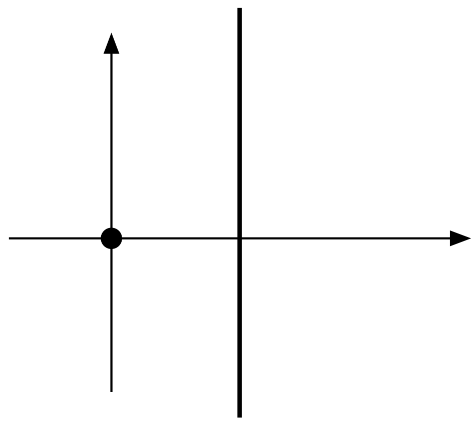

FIGURE 3.1 – L'équation $(x-1)(x^2+y^2)=0$ dans $\mathbf{R}^2$.

Quel est le point de vue de la géométrie algébrique sur cette situation ?

Tout d'abord, il faut dire que ce qui est porteur de l'information ici, c'est : (1) le polynôme $(x-1)(x^2+y^2)$; (2) le fait que l'on soit dans $\mathbf{R}^2$ muni des coordonnées (x,y). Algébriquement, on exprime ce fait en disant que l'anneau des fonctions régulières sur X est $\mathbf{R}[x,y]/(x-1)(x^2+y^2)$. C'est ce qu'il faut comprendre par *"coordinate ring"*.

Notons que lorsque X est une variété affine, l'anneau $A=k[X]$ doit être compris comme l'ensemble des fonctions régulières* sur X. En un sens, on doit apercevoir ici un des progrès de la géométrie : au lieu de considérer l'espace X, on s'intéresse aux fonctions sur X.

Quels sont, à présent, les éléments du spectre de X, où X est la variété donnée par $(x-1)(x^2+y^2)=0$? Il n'est pas difficile de montrer que les idéaux premiers sont $\mathbf{R}[x,y]/(x^2+y^2)$ (correspondant au point) et $\mathbf{R}[x,y]/(x-1)$ (correspondant à la droite).

Le spectre porte donc effectivement l'information géométrique au sens classique que nous avions relevé.

2.2 Schéma

Je me dois maintenant d'expliquer comment la notion de spectre peut permettre une conception de modelage. Pour cela, je vais donner des éléments du formalisme des schémas.

*. Attention : « régulière » n'a pas ici le même sens que précédemment, où il s'agissait de régularité au sens d'une classe C^r. Il s'agit ici, plus ou moins, de considérer comme régulière une fonction polynomiale.

La notion de schéma est désormais un incontournable de la géométrie algébrique. Elle a été proposée et exposée par Grothendieck dans les Éléments de Géométrie Algébrique, en particulier [Gro60].

Si je ne consacre qu'une petite partie de ce travail à cette notion, ce n'est pas par manque d'intérêt ou de profondeur. Cependant on ne peut se permettre d'aller dans le détail sans perdre en synthèse. Gardons donc de vue que la question qui nous intéresse est la suivante : comment la notion de schéma permet-elle de soutenir une conception de la géométrie contemporaine comme établissant des modèles et des modelages ?

Avant de donner la définition de schéma, il faudra celle de faisceau. Je ne vais pas donner ici de définition précise de ce qu'est un faisceau, cependant je vais donner quelques exemples. On pourra consulter par exemple [Sha10] pour des développements rigoureux.

Si M est une variété, alors je peux considérer les fonctions lisses sur M. Ce sont les fonctions $f\colon M \to \mathbf{R}$ de sorte que localement, c'est-à-dire dans une carte locale $(U, \varphi\colon \mathbf{R}^n \to U)$, $f \circ \varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est lisse au sens classique. On observe de cette définition qu'en diminuant la taille de U, on ne change pas le caractère lisse de f. C'est une propriété locale : elle est compatible avec la restriction des voisinages. De plus, si je me donne $f_1\colon U_1 \to \mathbf{R}$ et $f_2\colon U_2 \to \mathbf{R}$ régulières, alors – selon la condition évidente de compatibilité sur l'intersection – je peux les recoller en $f\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbf{R}$ de sorte qu'elle soit régulière.

De la même façon, je peux considérer les fonctions holomorphes sur une variété complexe, les fonctions méromorphes, ou encore les fonctions analytiques. Tous ces exemples fournissent des *faisceaux* de fonctions.

La propriété essentielle d'un faisceau, que l'on tentera de retenir, est qu'elle porte des fonctions dont la régularité voulue est locale : une fonction régulière doit l'être en vérifiant des voisinages suffisamment petits, et, la description locale d'une fonction régulière est suffisante pour construire une fonction globalement régulière.

La dernière notion nécessaire avant de donner une définition d'un schéma, est celle *d'espace annelé*. On se contentera de l'approche suivante. Une fois de plus, on pourra consulter, par exemple, [Sha10].

On retiendra qu'un espace localement annelé, c'est la donné d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux, $\mathcal{O}_X$, sur X.[*] Par exemple, $\mathbf{R}^n$ muni de $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ (le faisceau des fonctions lisses) est un espace localement annelé. De même pour $\mathbf{C}^n$ et le faisceau des fonctions holomorphe. Plus généralement, les variétés munies de leur faisceau de fonctions régulières (lisses, holomorphes) sont des espaces localement annelés.

Ce passage de $\mathbf{R}^n$ au variétés lisses et de $\mathbf{C}^n$ aux variétés complexes sera saisi par la notion de schéma.

Pour introduire la notion de schéma, regardons la façon dont Shafarevich

∗. Il faudrait rajouter le fait qu'en tout point, l'anneau des germes est un anneau local.

l'aborde dans [Sha10, p. 28].

> *Remark 5.2* The notion of ringed space provides a convenient principle for the classification of geometric objects. Consider, for example, differentiable manifolds. They can be defined as ringed spaces, namely, as those for which every point has a neighbourhood U such that the ringed space U, $\mathcal{O}_{|U}$ is isomorphic to $\overline{U}$, $\overline{\mathcal{O}}$, where $\overline{U}$ is a domain in n-dimensional Euclidean space, and $\overline{\mathcal{O}}$ is the sheaf of differentiable functions on it. This is precisely the definition used in de Rham [25] *, except that he does not use the terminology of sheaves.
>
> The general idea of this method for defining geometric objects is as follows : we impose a restriction on the local structure of a ringed space, that is, we fix in advance a class of ringed spaces, and require that every point has a neighbourhood isomorphic as a ringed space to one of these.
>
> The last remark leads us to the basic definition.
>
> **Definition 5.4** A *scheme* is a ringed space $X, \mathcal{O}_X$ for which every point has a neighbourhood U such that the ringed space $U, \mathcal{O}_{X|U}$ is isomorphic to $\operatorname{Spec} A$, where A is some ring.

L'idée sous-jacente à la notion de schéma est donc bien le fait de *modeler* un espace sur un modèle géométrique. C'est tout à fait explicite dans cet extrait.

Ici, le modèle géométrique est donné par $\operatorname{Spec} A$, où A est un anneau fixé. L'objet modelé est l'espace annelé, pour lequel on demande à ce que localement il corresponde à $\operatorname{Spec} A$. Par exemple, l'espace localement annelé $(\mathbf{R}^n, C^\infty(\mathbf{R}^n))$ est un modèle. Les espaces modelés sur cet espace sont les variétés différentielles.

Avant de conclure ce chapitre, nous pouvons tout de même nous demander dans quelle mesure cet emploi de la dialectique, entre géométries modèles et objets géométriques modelés sur elles, est proche de la géométrie de Thurston.

Ce qu'il faut noter, c'est que les objets mathématiques en jeu, tant bien au niveau des modèles que des modelés, ne sont pas les mêmes et ne jouent pas les mêmes rôles dans les théories.

Dans le cas de la théorie de Thurston, un petit nombre de modèles étaient au centre des préoccupations fondamentales : les huit géométries de Thurston. Dans le cas des schémas, il y a potentiellement un nombre infini de modèles : avec chaque anneau on peut obtenir un modèle en prenant son spectre.

Les objets modelés sont aussi très différents. Dans le cas de Thurston, il s'agissait de modeler des objets ayant par ailleurs une structure de variété lisse.

*. Cela fait référence dans la bibliographie à : « de Rham, G. : Variétés différentiables. Formes, courants, formes harmoniques. Hermann, Paris (1965). English translation : Differentiable Manifolds, Springer, Berlin (1984) ; MR **16**-957 ».

Dans le cas des schémas, il n'y a pas de tel rapport possible à une structure plus élémentaire : la variété des objets en jeu est bien plus grande.

Enfin, la nature des théorèmes fondamentaux sont aussi différents. La conjecture de géométrisation interroge la liste des modèles nécessaires pour décrire les variétés lisses, c'est une interrogation que l'on ne retrouve pas en géométrie algébrique. En géométrie algébrique, il y a une grande importance dans le rapport au modèle utilisé pour modeler, mais la nature des questions n'est pas la même.

À chaque fois, cependant, c'est bien la dialectique qui est en jeu. De façons différentes et très variables, mais épistémologiquement toujours identique : il y a d'une part des modèles et d'autre part des modelés et les relations entre les deux sont au cœur des préoccupations.

Cette dialectique et l'hypothèse qui en suit sur la nature de la géométrie contemporaine, sont le sujet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Caractérisation de la géométrie

Au chapitre précédent, j'ai proposé une hypothèse quant à la possibilité de discerner le champ de la géométrie, selon le fait qu'elle articule des géométries modèles et des objets géométriques modelés sur ces modèles.

Il est maintenant temps de proposer une caractérisation précise du champ de la géométrie dans les mathématiques contemporaines. Cette caractérisation doit remplir plusieurs objectifs : être testable ; être valide dans le cas de la géométrie de Thurston et dans d'autres exemples de théories géométriques ; et, être non valide dans le cas de théories non géométriques (ces derniers, je les appellerai des contre-exemples).

Plusieurs difficultés peuvent déjà être relevées. Tout d'abord, il semble que cette caractérisation ne sera pas valide pour des mathématiques antérieures à celles abordées dans le présent chapitre. [*] La géométrie ayant connu un tel bouleversement entre la fin du XIXème et la moitié du XXème, il est utopique d'espérer une caractérisation universelle, juste et intéressante de la géométrie.

Une seconde difficulté tient au fait qu'il est difficile d'avoir une idée précise de ce que sont les mathématiques actuelles. Bien que nous verrons différents exemples, espérés suffisamment variables, il sera difficile de justifier une justesse générale. Il semble même probable que la caractérisation proposée se révèle fausse pour certaines théories, mais cela ne devrait pas empêcher de poser les bonnes questions et d'apporter un début d'argumentation valide.

1 Mathématiques géométriques

La question qui doit guider notre chapitre est la suivante. *De quoi la géométrie est-elle le nom ?*

*. Ma lecture récente d'un essai de Lautman, *Les schémas de structure* [Lau38], semble indiquer que la caractérisation que je propose commence à prendre son sens à partir de la moitié du siècle dernier. On constate dans cet essai une pratique de la géométrie différente, mais qui progresse vers la pratique que je décris ici. Bien entendu, je suis très méfiant à l'idée de la recherche de précurseurs, mais la lecture de Lautman permet une comparaison non sans intérêt.

1.1 La géométrie de Thurston

En rencontrant la géométrie de Thurston, nous avons vu comment sa conception de la géométrie proposait une dialectique entre, d'une part, des géométries modèles et, d'autre part, des objets géométriques modelés sur elles. Cela était tout à fait explicite, et peut être schématisé de la façon suivante :

- Des couples (G, X) fournissent les géométries modèles.
- Tout variété est modelée sur le couple particulier $(C^{\infty}_{\text{difféo}}(\mathbf{R}^n), \mathbf{R}^n)$ des difféomorphismes agissants sur $\mathbf{R}^n$.
- La conjecture de géométrisation consiste à associer des modèles plus rigides (plus fins que la notion de variété lisse). Il y a huit tels modèles, ce sont les huit géométries de Thurston. Chaque variété décomposée est associée de façon univoque à une géométrie modèle et à un sous-groupe des isométries (qui devient alors son groupe fondamental).

Ce schéma met en valeur trois points :

(1) Il doit y avoir une notion de modèle géométrique.

(2) Les objets de la théorie considérée sont modelés sur ces modèles. On dit alors que ce sont des objets géométriques. [*]

(3) Des théorèmes et preuves en jeu dans la théorie doivent porter sur les structures géométriques et leurs rapports aux objets modelés sur elles.

Ce dernier point sera tout à fait essentiel dans la possibilité même de la caractérisation. En effet, bien qu'il est possible de penser que les deux premiers points sont des effets de vocabulaire, le troisième point doit être flagrant dans la théorie et ne peut pas être mal interprété. [†]

1.2 Une épistémologie des mathématiques

Avant de procéder à l'exposition d'une caractérisation de la géométrie comme domaine des mathématiques contemporaines, je me dois de préciser le cadre épistémologique dans lequel je me place.

J'appellerai théorie, théorème, définition et preuve ce que les mathématiciens disent couramment de ces termes.

Une théorie est un discours, formé par un ensemble de définitions, de théorèmes et de preuves, et dont la présentation est généralement formulée de la

---

∗. Ces objets étaient-ils déjà géométriques avant même de considérer un modèle géométrique ? Ils l'étaient certainement potentiellement, avant ce geste, mais c'est bien l'apport d'un modèle géométrique qui rend ces objets géométriques. Cela rend compte du fait qu'un ensemble n'est pas un objet géométrique, alors qu'un ensemble muni d'une structure géométrique l'est.

†. En un sens, les deux premiers points sont à propos du formalisme de la théorie, alors que le dernier concerne la structure théorique même.

façon suivante. Un certain nombre de définitions viennent délimiter ce que j'appellerai les *objets sujets* en jeu : des théorèmes formulent les résultats sur ces objets sujets, les preuves justifient ces théorèmes, en faisant parfois appel à des résultats intermédiaires (des lemmes ou propositions, qui ne portent pas nécessairement sur les objets sujets de la théorie).

La dénomination *sujet* que j'utiliserai, à distinguer de celle *d'objet sujet*, a pour but de souligner deux phénomènes :

- il y a des *objets sujets* mathématiques qui sont en jeu dans les théorèmes, par exemple les variétés lisses compactes dans le théorème de dualité de Poincaré ;

- il y a des objets et des questions qui sont en jeu plus généralement dans la théorie, par exemple la classification topologiques des variétés en topologie : ce sont les *sujets*.

Cette distinction cherche à rendre compte du phénomène suivant. Un certain nombre de théories formellement très différentes cherchent en réalité à révéler des aspects d'un même sujet.

Par exemple l'étude de la sphère à n dimensions réelle peut se faire par des théories très différentes : la topologie algébrique, la géométrie différentielle, la géométrie algébrique, l'algèbre commutative. Chacune de ces théories a une conception de la sphère qui n'est pas la même, par exemple la sphère différentielle et la sphère topologique sont très différentes : il y a des sphères différentielles qui ne sont pas les mêmes bien que les sphères topologiques correspondantes soient identiques [∗]. [†]

On s'accordera à dire que bien que les objets sujets des théorèmes de chacune des théories soient différents, voire incompatibles, ils peuvent parfois relever d'un même sujet (non nécessairement défini mathématiquement). Ce sujet peut être un objet élémentaire (par exemple une sphère), ou bien une question (par exemple la classification topologique).

Chacune des théories mathématiques *interprète* son *sujet* intitial en donnant lieu en particulier à des définitions *d'objets sujets*.

Le sujet n'est pas nécessairement traité entièrement par la théorie, c'est même d'ailleurs souvent l'intérêt : une théorie traite d'un aspect du sujet, de façon à donner l'impression que l'on comprend mieux le sujet initial dont il est réellement question. C'est une forme d'abstraction supplémentaire : on fait émerger des objets sujets qui ont des caractéristiques particulières à la vue du sujet initial. Cette abstraction permet l'usage d'outils nouveaux et féconds.

Si on prend, par exemple, la question, jouant le rôle de sujet, de la classification topologique des espaces topologiques, il apparaît totalement irréaliste

∗. On parle alors de sphères exotiques, les premiers exemples ont été découverts par Milnor en 1956 en dimension sept.

†. On pourrait aussi penser aux surfaces K3 qui ont autant de définitions que de théories différentes les étudiant.

de chercher à répondre à la question aussi généralement énoncée. Les résultats que l'on peut (humainement) produire sont ceux qui restreignent le sujet à des objets sujets moins généraux, par exemple les variétés compactes de la conjecture de Poincaré (qui est maintenant un théorème).

Cette approche épistémologique des mathématiques met en valeur le fait que nous devons nous pencher sur une dialectique entre sujets et objets sujets.

Quels sont les sujets de la géométrie ? C'est une question qui m'est bien trop difficile. Cependant, on peut s'intéresser à la question : quels sont les objets sujets des théories géométriques ?

Ces objets sujets des théories peuvent être répertoriés en s'intéressant aux théorèmes et définitions les plus importants dans l'exposé mathématique de la théorie tel qu'effectué dans les articles, livres et conférences. Il n'est en général pas difficile de relever les plus importants.

Ainsi, je m'intéresserai à la géométrie comme domaine réunissant différentes théories (qui peuvent traiter de mêmes sujets) qui emploient des objets sujets différents. Je chercherai à caractériser ces objets sujets et leurs rôles dans les théories.

Une tension peut se créer au sein du lecteur qui aura en mémoire la discussion introductive, notamment page 8, où je dis que le domaine de la géométrie, en tant que domaine, est une construction sociale. J'ai développé l'idée selon laquelle ce que nous appelons la géométrie est le produit d'un contexte bien plus social que mathématique. Mais alors on pourrait poser la question : comment est-il seulement possible de caractériser des théories comme géométriques, par des critères portant sur les mathématiques, si le fait d'être géométrique est une construction sociale ?

Ce qu'il faut saisir, c'est la différence entre la caractérisation que je vais proposer et sa raison d'être. Il est possible de faire une analyse conceptuelle du domaine que l'on appelle la géométrie, tout en sachant que les raisons sous-jacentes à la caractérisation que je vais proposer sont issues d'un contexte social. En d'autres termes, la caractérisation est bien détachée d'une analyse sociale dans son *application*, mais dans sa *raison d'être*, et j'entends par là la fondation de cette caractérisation, il n'est pas possible de se détacher du contexte social.

C'est aussi pourquoi la caractérisation que je vais présenter n'est pas issue d'une réflexion détachée du contexte social dans lequel s'inscrit la géométrie aujourd'hui. En étudiant de près les textes de Thurston, nous nous sommes rattachés à une tradition particulière. Cette tradition a grandement influencé notre façon même d'appréhender les mathématiques, et c'est donc par là que le contexte social s'insère dans la construction de ma caractérisation.

Le processus psychologique par lequel j'ai construit la caractérisation que je souhaite défendre, est laissé absent de notre discussion. D'une part parce que j'en ai pas pleine conscience, d'autre part parce que, précisément, il fait intervenir des considérations sociologiques très importantes et qui nous demanderaient de grands efforts pour être analysées correctement.

Nous allons donc à présent ignorer cet aspect sociologique, pour nous concentrer sur l'analyse de l'efficacité de la caractérisation que je vais détailler une fois que nous aurons terminé les discussions préalables nécessaires.

1.3 Présentations mathématiques

Une question doit également être traitée avant que nous puissions légitimement proposer une caractérisation. Elle fait, une fois de plus, écho à la question : de quoi parlons-nous ?

Cette fois-ci, inspectons les théories mathématiques de façon plus directe. Que constatons-nous ? Existe-t-il seulement quelque chose dans notre monde qui s'appellerait, par exemple, « Théorie des groupes » ?

Un tel objet n'existe pas, nous (mathématiciens et philosophes) avons toujours affaire à des exposés (écrits ou oraux) de théories. Ces exposés ne sont jamais identiques deux-à-deux, ils sont donc essentiellement variables. Il serait idéaliste que de penser que nous pourrions caractériser des théories mathématiques sans avoir la discussion suivante. *Comment s'incarne une théorie mathématique ?*

Cette question peut naturellement donner lieu à une discussion bien trop difficile sur l'ontologie même des mathématiques (qu'est-ce qu'un objet mathématique ?) mais je souhaite pour le moment continuer d'éviter cette discussion. Nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de trancher le débat de l'ontologie des mathématiques pour saisir l'épistémologie des théories mathématiques nécessaire à notre étude. Les théories sont avant tout *des discours* (écrits ou oraux) que l'on peut analyser comme tels, sans avoir besoin de répondre à la question de l'ontologie des mathématiques.

Tentons de comparer deux exposés hypothétiques de théories mathématiques traitant d'une même interprétation d'un sujet mathématique. Par cela, j'entends deux discours mathématiques ayant pour but commun de traiter d'une question mathématique précise (le sens du mot *sujet* est à prendre au sens de la discussion précédente). Cette situation est possible et tout à fait essentielle. Bien qu'une théorie *interprète* son sujet en premier lieu, elle ne s'en tient pas à une interprétation. Il est possible que deux discours soient différents alors même que l'interprétation initiale du sujet mathématique soit la même.

Qu'est-ce qui peut varier entre ces deux discours ? Tout d'abord les aspects liés à l'expression langagière (la qualité de la langue, mais aussi des dessins et représentations graphiques). Ces premiers aspects ne m'intéressent que peu, car ils ne révèlent pas les caractères *mathématiques* des théories mathématiques en jeu, mais seulement leurs caractères charnels (j'entends par là, du fait qu'ils soient incarnés par un discours).

La variabilité des mathématiques peut se faire de plusieurs façon : par exemple, un changement dans l'ordre d'exposition (une définition qui viendrait après, plutôt qu'avant), des preuves différentes mais aussi un questionnement initial différent (la motivation de l'exposé).

Une variation entre deux éléments de discours sera dite *d'expression* si elle relève, ou bien des aspects langagiers, ou bien des variations mathématiques mais où il y a équivalence formelle. À quelle condition deux preuves sont-elles équivalentes ? Lorsqu'elles utilisent les mêmes arguments (lemmes intermédiaires, par exemple). Il ne s'agit pas de dire qu'il y a équivalence formelle entre toutes les preuves qui sont justes, cela n'apporterait pas de sens. En revanche, on sait reconnaître des preuves qui prennent des « chemins différents », et ce sont ces chemins que l'on veut distinguer.

Les autres variations seront dites *sémantiques*. Cela nous permet de distinguer des variations d'expressivité (par exemple l'ordre des définitions) des variations qui relèvent du sens mathématique profond (par exemple une preuve différente).

Cette variabilité des mathématiques pose une question cruciale. Est-il seulement possible de parler d'une théorie mathématique ?

Toute la philosophie des mathématiques que nous avons abordée jusqu'à présent prétendait (même sans l'avouer) que oui : il existe bien des théories mathématiques et nous pouvons faire une réflexion philosophique sur elles. [*]

Je soutiens que, oui, nous pouvons avoir un discours sur les théories mathématiques, sachant qu'il y a une variabilité inhérente au fait que les théories soient des discours. Cette variabilité m'oblige, en revanche, à devoir souligner un point : il faudra distinguer dans une caractérisation ce qui relève de la variabilité d'expression et ce qui relève de la variabilité sémantique.

Une bonne caractérisation devrait être indépendante du premier type de variabilité, mais pas du second. En effet, nous voulons être capables de considérer la plupart du temps comme équivalents deux exposés faits par un même mathématicien avec le même contenu mais à trois jours d'écart ; en revanche, nous voulons pouvoir distinguer des exposés d'époques différentes [†], ou de styles mathématiques différents.

Ce contrat philosophique que je propose me permet deux choses : tout d'abord, de ne plus avoir à me soucier de l'origine précise des discours mathématiques que j'étudie, mais seulement des instances sémantiques particulières ; il me permet aussi d'écrire d'une façon très naturelle les mathématiques que je

∗. On pourrait questionner les objets mathématiques de la même façon : existe-t-il seulement un objet mathématique qui soit immuable ?

†. Nous nous intéressons à des mathématiques contemporaines, ce qui demande bien à ce que nous arrivions à discerner des versions différentes de discours mathématiques. En disant cela, je sous-entends que des différences historiques puissent s'inscrire sémantiquement. En effet, des changements de définitions, de canons de rigueurs, d'outils utilisés, sont des éléments sémantiques qui peuvent avoir une origine historique et donc permettre de distinguer des discours historiquement distincts. Réciproquement, deux discours sans différence sémantique portent la même information mathématique et donc la même information conceptuelle sur le discernement de la géométrie, et devraient donc être considérées comme de même valeur aux yeux de notre étude.

souhaite aborder. En effet, puisque je suis moi-même dans les mathématiques contemporaines, les variations que j'écrirai correspondront à des mathématiques contemporaines et seront donc valables pour notre étude.

Je conçois la critique suivante. On pourrait très bien soutenir le fait qu'il n'y ait jamais réellement deux exposés sans différence sémantique. L'acte de juger deux preuves comme strictement équivalentes, au sens décrit précédemment, n'est pas aisé et soulève bien des interrogations légitimes.

Cependant, il me semble que le plus important ici est de garder en tête le problème suivant : comment arriver à formuler un discours philosophique sur des théories mathématiques, si l'on n'arrive pas à en discerner quelque contenu conceptuel ? C'est donc une nécessité même à une étude philosophique, que d'arriver à parler d'une théorie mathématique en faisant un choix, d'une façon ou d'une autre, de sorte à pouvoir abstraire le contenu mathématique de la forme pure du discours.

Je conçois une fois de plus la possibilité de nier totalement cette option, de renier une étude philosophique conceptuelle isolément de la forme du discours. Je concède n'avoir aucun argument à ceux qui pensent que la philosophie ne devrait, de toute façon, jamais étudier de théorie mathématique sans en prendre toute la matière telle qu'elle nous apparaît et sans jamais l'altérer. Mais je constate que ce choix pose bien des difficultés pratiques, et n'est d'ailleurs quasiment jamais pratiqué.

Les partisans de cette dernière pratique peuvent cependant maintenir malgré tout ma position, en refusant toute distinction et en oubliant donc ma discussion précédente sur la nécessité d'une caractérisation de s'adresser aux variabilités sémantiques et non formelles. Ces partisans pourront tout de même prendre au sérieux mes arguments et étudier ma caractérisation. Cependant, il ne pourront pas prendre mes exemples de théories de façon aussi directe, et auront besoin de prendre des exposés authentiques pour tester ma caractérisation.

Une dernière question s'érige et nous demande une réponse. Comment devrions-nous réagir si deux versions sémantiques d'une même théorie donnent des résultats différents par la caractérisation ?

J'ai déjà donné un élément de réponse : cela peut signifier que les deux versions correspondent à des temps mathématiques différents, et cela renforcerait la conviction que la caractérisation traite des mathématiques contemporaines.

Mais que devrions-nous dire, si de plus, ces versions coexistent temporellement ? Je propose ici de distinguer alors ces deux versions de façon claire. Cela nous montrerait qu'il existe des théories pour lesquelles, la version sémantique fait varier la nature des théories : étant, ou non, géométrique.

Cela a une importance cruciale philosophique : le caractère « être géométrique » est alors une propriété des théories mathématiques. C'est une qualité qui va au-delà du simple énoncé des résultats mathématiques et de l'emploi des objets, c'est une qualité qui dépend du *mathématicien*. On rejoint alors complètement la discussion introductive de ce mémoire (p. 8), où je mettais l'accent sur l'aspect sociologique du domaine de la géométrie.

Les mathématiciens jouent un rôle tout à fait majeur dans la détermination de l'aspect géométrique : c'est leur pratique des mathématiques qui le détermine, à travers les théories mathématiques, qui sont par essence des discours.

1.4 Caractérisation de la géométrie

Je vais maintenant proposer une caractérisation du domaine de la géométrie. Elle consiste en trois critères. Ces critères portent sur une théorie mathématique. Si chacun de ces critères est vérifié, alors je soutiens qu'il s'agit d'une théorie géométrique.

Le lecteur pourra vérifier que cette caractérisation respecte les discussions précédentes.

(1) *La théorie doit proposer une notion de modèle.*

Ces modèles sont parfois dit *locaux*, ou alors *simples*. Ce qui compte ici, c'est l'importance formelle donnée à ces objets : ils doivent être considérés comme des cas particuliers mais révélateurs de la généralité considérée dans la théorie.

(2) *La théorie doit construire ses objets sujets à partir de ces modèles.*

Que ça soit par exemple par *recollement*, ou alors par *quotient* ; la théorie doit systématiquement construire les objets qui sont les sujets des théorèmes les plus importants sur la base des modèles.

(3) *Les théorèmes et les preuves utilisent la dialectique entre modèles et objets modelés sur eux.*

Par exemple, des preuves faisant apparaître des *trivialisations locales* ou bien même une réutilisation explicite de la construction des objets par les modèles, ou des théorèmes à propos des possibilités de modélisation (comme dans le cas de la théorie de THURSTON) sont de façon flagrante utilisateurs de la dialectique.

Pour la vérification des critères, on peut procéder de la façon suivante. Les deux premiers points se voient dans les définitions de la théorie. Le dernier point se voit dans les problématiques initiales (celles portant l'intérêt de la théorie), dans les conjectures les plus centrales et dans les preuves et théorèmes emblématiques.

Il nous faut remarquer que cette caractérisation ne dit pas directement ce qu'est *la géométrie* mais ce que sont les *théories géométriques*.

Je fais donc ici la confusion entre la géométrie en tant que domaine et l'ensemble des théories géométriques, que je considère comme constituantes de la géométrie. On pourrait très bien soutenir que la géométrie contient plus que des théories géométriques, mais je ne saurai dire ce que ces éléments supplémentaires seraient.* Je considère donc qu'un domaine géométrique est la réunion de ses théories.

Cette confusion faite, cette caractérisation répond bien à la question : qu'est-ce que la géométrie contemporaine ? C'était l'un des buts affichés du mémoire, il nous faut donc maintenant confronter cette caractérisation aux mathématiques contemporaines de façon directe.

Mais comment procéder à la comparaison entre cette caractérisation et la géométrie ? Si l'on pouvait directement tester cette caractérisation en procédant à une succession judicieuse de comparaisons sur des exemples, alors on pourrait donner une idée claire de ce qu'est la géométrie (en disant quels exemples sont exactement ceux à vérifier comme étant géométriques, on pourrait dire ce qui est essentiel à la géométrie – à savoir ces exemples), pourtant c'est l'une de nos interrogations même. Donc la méthodologie à notre portée ne peut pas procéder aussi directement.

On ne peut pas *pleinement* (c'est-à-dire sur l'ensemble tout entier des mathématiques contemporaines) confirmer ou infirmer que cette caractérisation est juste : elle dépend de ce que le lecteur a comme définition subjective de la géométrie contemporaine (voir page 9).

Il ne s'agit pas de dire que la notion de domaine géométrique est purement subjective et donc inabordable par une étude épistémologique, mais de dire que *certaines* théories ont un statut (de fait) flou, même lorsqu'elles sont considérées indépendamment des individus. Ces théories ont donc un statut uniquement subjectif vis-à-vis de la géométrie. Mais cela n'est pas un frein à notre étude : un grand nombre de théories ont un statut parfaitement clair vis-à-vis de la géométrie (telle que considérée par le contexte social actuel), et c'est ce positionnement que nous étudions épistémologiquement.

Je fais donc le choix de considérer des théories qui : ou bien se revendiquent géométriques (comme la théorie de THURSTON), ou bien se revendiquent comme non géométriques.

Comment devrions-nous réagir si nous observons qu'une théorie dont on ne saurait dire si elle est géométrique ou non, vérifie les critères proposés ? Il y a deux réactions possibles : ou bien les critères permettent de considérer cette théorie comme géométrique, et c'est alors la découverte de cette qualité ; ou bien on ignore ces exemples en considérant qu'on doit se restreindre à tester des théories bien identifiées comme étant, ou non, géométriques.

Je pense que la caractérisation proposée permet d'y voir plus clair lorsque

*. Bien entendu, on pourrait répondre naïvement « le contexte social », mais cet élément est déjà compris dans notre étude : nous avons fait le choix de nous placer dans un contexte particulier, qui est celui des mathématiques contemporaines et occidentales. C'est d'ailleurs ce choix qui nous permet de faire une étude conceptuelle du domaine de la géométrie sans avoir à se soucier des caractères sociologiques, pourtant évidemment essentiels à la question la plus générale sur la nature de la géométrie dans l'ensemble des mathématiques produites à travers tous les cadres sociaux.

ce statut n'est pas précisé. La caractérisation ayant été bâtie sur un cas de géométrie parfaitement identifié, et dont je vais montrer qu'elle résiste à de nombreux exemples et contre-exemples, on peut considérer qu'elle permet des découvertes qui vont au-delà des connaissances que nous avions *a priori*.

Ces découvertes peuvent avoir des implications pratiques : on pourrait tenter de réécrire ces théories pour mettre en valeur la dialectique entre modèles et objets modelés. Cela pourrait changer notre rapport à ces théories. Ce sont ici des conséquences didactiques.

Cependant, je ne vais pas étudier dans le détail de telles théories aux statuts gris. Le lecteur intéressé pourrait tenter de comparer la caractérisations à ces théories : la théorie de la mesure [*], la théorie des groupes commutatifs [†], ou encore la dynamique complexe à une variable [‡].

2 Vérification des critères

À présent, j'aimerais donner plusieurs exemples de théories reconnues traditionnellement comme géométriques et vérifiant bien ces critères. Notons tout de même que deux exemples majeurs ont été traités dans le chapitre précédent : la théorie topologique et géométrique de Thurston ainsi que la théorie des schémas de Grothendieck (bien qu'exposée par Shafarevich dans le développement proposé).

Les exemples de cette nouvelle section sont issus des théories suivantes : la théorie des classes caractéristiques et la topologie (algébrique) des CW-complexes. D'autres exemples similaires peuvent être traités de façon comparable. On pensera par exemple à la théorie des variétés complexes, la théorie topologique des complexes simpliciaux, la théorie des revêtements et plus généralement des fibrations de Serre.

2.1 Classes caractéristiques

La théorie des classes caractéristiques a pour objet sujet les fibrés vectoriels. [§]

L'exposé qui suit sera très synthétique, pour tenter de faire transparaître la qualité géométrique, au détriment du détail. Pour avoir cet exposé de façon plus complète et sans variation sémantique, on pourra consulter [MS74].

> Définition 1
>
> *Un fibré vectoriel* (π, E, B) *de rang* k (entier), c'est la donnée d'un triplet constitué de : une application $\pi : E \to B$ continue surjective, d'un espace topologique dit *total* E et d'un espace dit de *base* B.

$*$. Où la notion de fonction escalier semble remplir le rôle de modèle.

†. Où la classification des groupes commutatifs de type fini semble faire apparaître des modèles.

‡. Où des linéarisations locales semblent être des modèles.

§. Bien que cela soit possible d'étendre à des classes plus larges de fibrés, nous allons nous préoccuper de ceux-ci.

L'application π, doit vérifier une condition de trivialisation locale : pour tout $b \in B$, il existe un voisinage U de B tel que π se factorise de la façon suivante.

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbf{R}^k \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Si U peut être pris égal à B, alors on dit que le fibré est trivial.

Cette définition fait bien apparaître le caractère géométrique : le modèle local est le fibré trivial de rang k, $U \times \mathbf{R}^k$, et chaque fibré est modelé sur celui-ci par un jeu de trivialisations locales.

LEMME 2

Soit M une variété lisse de dimension n. Les fibrés tangent et normal sont vectoriels et de rang n.

Ce lemme se démontre en revenant à la définition d'une variété lisse par son atlas de régularité lisse.

DÉFINITION 3

Soit $G_k(\mathbf{R}^{n+k})$ la grassmannienne de rang k de $\mathbf{R}^{n+k}$: c'est l'ensemble des k-plans vectoriels de $\mathbf{R}^{n+k}$.

Le *fibré canonique* de rang k, noté $\gamma^k(\mathbf{R}^{n+k})$, est le fibré vectoriel de rang k défini de la façon suivante. Son espace total est donné par les couples d'un k-plan vectoriel de $\mathbf{R}^{n+k}$ et d'un vecteur de ce plan. C'est topologiquement inclus dans le produit $G_k(\mathbf{R}^{n+k}) \times \mathbf{R}^{n+k}$. La projection est définie par $\pi(X, x) = X$ (et donc la base est $G_k(\mathbf{R}^{n+k})$).

On peut vérifier qu'ainsi défini, le fibré canonique est bien un fibré vectoriel de rang k.

Cette notion va jouer le rôle de géométrie modèle.

THÉORÈME 4

Soit M une variété lisse fermée de dimension k. Alors si (π, E, M) est un fibré vectoriel de base M et de rang k, il est isomorphe au tiré-en-arrière $f^*(\gamma^k(\mathbf{R}^{n+k}))$ pour n assez grand et $f : E \to \gamma^k(\mathbf{R}^{n+k})$.

L'idée de la preuve est la suivante : on recouvre M par p cartes locales contractiles, de sorte que le théorème est vrai sur chaque carte. Maintenant le recollement des cartes et une partition de l'unité fournissent une application sur $\mathbf{R}^{pk}$ qui donne l'application f recherchée.

Plus de détails sont donnés dans [MS74], mais l'idée de la preuve est respectée. Il s'agit réellement de considérer la structure géométrique de la variété et du fibré.

DÉFINITION 5

Les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel (π, E, M) sont déterminées par f et $\gamma^k(\mathbf{R}^{n+k})$ donnés par le théorème précédent.

C'est ainsi que les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel sont un objet géométrique. Leur théorie est également géométrique, le lecteur soucieux devrait se reporter à [MS74].

2.2 CW-complexes

Un complexe cellulaire (ou aussi appelé CW-complexe) est une construction elle aussi géométrique.

Les modèles sont les cellules : une cellule de dimension n est une copie du disque D^n euclidien de dimension n.

DÉFINITION 6

Une *structure de CW-complexe* sur un espace topologique X, c'est la donnée d'une suite croissante

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$$

de sous-espaces de X, de sorte que

$$X = \bigcup_{n \geq 0} X_n,$$

et :

- une partie de X est fermée dans X si, et seulement si, pour tout entier $n \geq 0$, l'intersection de cette partie avec X_n est fermée dans X_n ;
- X_0 est un espace discret non vide ;
- chaque X_n est homéomorphe au quotient de

$$X_{n-1} \coprod \left(\coprod_i D_i^n \right),$$

où D_i^n est une copie du disque unité fermé de dimension n, par une application continue, dite de *recollement*,

$$\varphi_i : \partial D_i^n \to X_{n-1} \ ;$$

- l'image de chaque application φ_i n'intersecte qu'un nombre fini de cellules de dimension au plus $n-1$.

Cette définition fait apparaître clairement qu'un CW-complexe est modelé sur des cellules, qui sont bien des modèles élémentaires.

L'un des théorèmes élémentaires mais fondamentaux des CW-complexes est qu'ils sont, d'un point de vue homologique, porteur de la même information que la structure singulière.

THÉORÈME 7

L'homologie singulière d'un espace topologique X est isomorphe à l'homologie cellulaire.

Plus de détails peuvent être trouvés dans [Bre93], mais ce théorème illustre une question géométrique : les deux modélisations, l'une par cellules, l'autre singulière, donnent-elles la même information ?

THÉORÈME 8

Toute variété lisse compacte M admet une structure de CW-complexe.

Ce théorème est un classique de la théorie de Morse, et elle est brillamment exposé dans [Mil69]. Ce théorème répond à la question géométrique : peut-on modéliser une variété lisse par des cellules ?

En conclusion, c'est bien une théorie géométrique, et elle vérifie la caractérisation.

3 Contre-exemples

Maintenant que nous avons une base solide d'exemples de théories vérifiant les critères et étant bien des théories reconnues comme géométriques, il est important de considérer des contre-exemples.

Ces contre-exemples sont des théories qui ne vérifieront pas les critères et qui ne sont effectivement pas des théories géométriques. Cela a une importance : on s'assure que certaines des théories non géométriques ne sont pas vues comme géométriques par la caractérisation, et on s'assure donc que les critères ne sont pas trop généraux, de sorte à ce qu'ils caractérisent effectivement quelque chose de non général aux mathématiques contemporaines.

Les contre-exemples proposés sont les suivants. Le théorème de Sylow en théorie des groupes et le théorème de convergence dominée en théorie de l'intégration. Le premier exemple appartient traditionnellement au domaine l'algèbre et le second au domaine de l'analyse.

Notons que j'abrège ces appellations. Par exemple, en disant « le théorème de Sylow » je masque le fait qu'il s'agit *d'une* théorie sur le théorème de Sylow, c'est-à-dire un discours particulier. Nous verrons par la suite qu'il n'est pas impossible d'avoir deux théories différentes mais portant sur un même résultat (par exemple le théorème de Sylow) et avec une même interprétation du sujet, sans pour autant qu'elles soient simultanément dans la même catégorie. C'est le problème de *géométrisation* des théories.

3.1 Théorème de Sylow

Définition 1

Soit G un groupe. C'est un p-groupe si p est un nombre premier et divise l'ordre de G.

Un p-sous-groupe de Sylow de G est un sous-groupe de cardinal p^n avec n maximal : p^n divise l'ordre de G mais pas p^{n+1}.

Le théorème de Sylow comporte plusieurs résultats (voir [Lan02] pour un exposé classique, qui est repris ici), mais le plus important et difficile est celui sur l'existence des p-sous-groupe de Sylow.

Théorème 2 (Sylow)

Soit G un groupe d'ordre $p^n m$ avec p qui ne divise pas m. Alors il existe un p-sous-groupe de Sylow de G.

Preuve

La preuve classique se fait par récurrence sur n.

Le théorème est bien vrai si G est d'ordre m ($n = 0$) (le sous-groupe trivial est alors un p-sous-groupe de Sylow). On suppose donc que le théorème est vrai jusqu'à l'ordre $p^{n-1}m$.

On regarde les sous-groupes H de G.

- Si l'indice $[G : H]$ est premier avec p, alors un p-sous-groupe de Sylow de H, qui existe par hypothèse de récurrence, en est un de G.
- Si p divise tous les indices $[G : H_i]$ pour H_i sous-groupe de G, alors par la formule des classes :

$$|G| = |Z| + \sum [G : Z_i]$$

on obtient que p divise $|Z|$. Mais alors Z est un p-groupe et a donc un p-sous-groupe, K. Ce p-sous-groupe est distingué dans G car il est dans son centre. On applique alors l'hypothèse de récurrence au quotient G/K, cela fournit un p-sous-groupe de Sylow L. Maintenant l'image réciproque de L par la projection canonique $G \to G/K$ fournit le p-sous-groupe de Sylow voulu.

■

Cette preuve par récurrence ne fait, en effet, pas apparaître la moindre notion de modèle, modelé ou de dialectique plus élémentaire. Il s'agit principalement d'étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison et d'utiliser des propriétés arithmétiques élémentaires sur la divisibilité par un nombre premier.

3.2 Théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence dominée s'inscrit classiquement dans la théorie de la mesure.

Il a pour objets sujets les fonctions $\mathcal{L}^1$, c'est-à-dire mesurables et dont les intégrales de leurs modules sont finies. On considère une suite de telles fonctions, dont on sait qu'elle converge vers une fonction mesurable, et on cherche à savoir si cette fonction mesurable est $\mathcal{L}^1$ elle aussi.

Théorème 3 (Convergence dominée)

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs réelles. (Un énoncé semblable existe pour des fonctions à valeurs complexes, ça n'est pas une réelle difficulté technique.) On fait les hypothèses suivantes.

(1) Il existe f mesurable telle que $f_n \to f$, μ-presque partout.

(2) Il existe une fonction g mesurable, à valeurs positives, telle que

$$\int g \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

et $|f_n| \leq g$, μ-presque partout.

Alors $f \in \mathcal{L}^1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

PREUVE

Supposons d'abord que les hypothèses soient vraies partout, et pas seulement μ-presque partout.

Alors on a bien $f \in \mathcal{L}^1$ puisque $|f| \leq g$ et $g \in \mathcal{L}^1$. Ensuite, comme $|f_n - f| \leq 2g$, et $|f - f_n| \to 0$, on applique le lemme de FATOU et il vient

$$\liminf \int (2g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu \geq \int \liminf (2g - |f_n - f|) \,\mathrm{d}\mu = 2 \int g \,\mathrm{d}\mu$$

par linéarité :

$$2 \int g \,\mathrm{d}\mu - \limsup \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \geq 2 \int g \,\mathrm{d}\mu$$

ce qui conclut avec les hypothèses fortes.

Avec les hypothèses initiales, on considère A l'ensemble où les hypothèses sont vraies partout (et non pas μ-presque partout) et on applique le procédé précédent à $1_A(x) f_n(x)$ et $1_A(x) f(x)$. Les intégrales sont inchangées, du fait que le complémentaire de A doit être de mesure nulle. ∎

Ce théorème est donc sans trace de géométrie : pas de notion de modèle ou de dialectique même plus élémentaire. Le seul outil qui a été nécessaire est le lemme de FATOU qui, lui non plus, n'est pas géométrique.

4 Géométriser une théorie

L'un des objectifs principaux de notre étude était de déterminer lorsqu'une théorie mathématique est géométrique. Les sections précédentes présentent une façon de procéder pour cette détermination. La caractérisation que j'ai proposée se veut en être l'ingrédient principal.

Mais n'oublions pas la vue initiale que nous avions sur notre étude. En introduction, nous avions l'ambition de nous intéresser aux « intentions géométriques » (page 1). Quelle est la différence avec le travail produit jusqu'à présent ?

En nous intéressant aux théories mathématiques, nous nous sommes penchés sur des discours de nature très particulière. Ce sont des discours construits, mathématiquement justes, sur un sujet mathématique. Mais cela ne rend pas totalement compte de l'activité mathématique. Nous aimerions nous intéresser à présent sur des éléments de granularités plus fines que les théories mathématiques, dans le but de nous rapprocher d'une compréhension de ce qu'est la géométrie contemporaine aussi généralement que cela nous est possible.

Pour adresser cette nouvelle finesse, il nous faut affiner notre approche épistémologique. C'est ce dont nous allons discuter ci-dessous. Mais avant cela, rappelons qu'à présent, nous traitons des éléments qui ne sont plus des théories mathématiques figées. Nous nous intéressons à des niveaux plus fins. L'idée porteuse sera de faire varier les théories, de sorte à révéler ces nouveaux éléments.

La question qui nous portera est la suivante. Peut-on géométriser une théorie mathématique ? J'entends par là le fait de transformer un discours initialement non géométrique (c'est-à-dire ne vérifiant pas la caractérisation) en un discours qui, lui, est géométrique. Cette question nous demande donc de nous pencher plus sérieusement sur la nature d'une théorie mathématique.

4.1 Dégéométriser une théorie

Avant de traiter cette question de façon frontale, j'aimerais proposer l'étude de la question duale : peut-on « dégéométriser » une théorie géométrique ?

On voit bien mal comment la théorie de Thurston pourrait être dégéométrisée alors même qu'elle traite d'un sujet profondément géométrique. Il y a donc là, la possibilité de traiter cette question en revenant à la question de la place de la géométrie dans une théorie géométrique.

Cette place peut se situer à deux niveaux. Tout d'abord, et c'est le niveau le plus fondamental dans son élaboration, la géométrie peut être le *sujet* de la théorie. C'est par exemple le cas de la théorie de Thurston : la question géométrique de la classification des variétés est le sujet de la théorie, que celle-ci interprète de sorte à produire des objets sujets en correspondance. * Ce niveau fondamental ne peut pas connaître de changement sans perdre l'identité de la théorie. Il est donc impossible de dégéométriser une théorie dont la géométrie est au cœur de son sujet même.

Le deuxième niveau se situe dans les développements mathématiques. Supposons que notre théorie n'ait pas un sujet géométrique, de sorte que l'on puisse supposer que les objets sujets ne portent pas non plus en eux des caractéristiques géométriques. Alors il faut que la géométrie soit incarnée dans ce qui reste, à savoir les preuves et théorèmes. Concentrons-nous sur les preuves. Est-il possible d'extraire la géométrie d'une preuve, de sorte à ce qu'il n'y reste plus la trace d'une intention géométrique ?

C'est là, la question au cœur de notre recherche : extraire une intention géométrique d'une preuve mathématique. Ce geste demande d'orchestrer des interrogations de natures bien différentes : qu'est-ce qu'une intention géométrique ? comment se peut-il qu'une preuve porte une intention géométrique ? le formalisme peut-il cacher des intentions, de sorte qu'une preuve formelle serait dénuée d'intention ?

La caractérisation que j'ai proposée permet d'apporter quelques éléments de réponse : une intention géométrique peut se comprendre dans la volonté de

∗. Je rappelle que, dans ma dénomination, un sujet n'a pas nécessairement de réalité mathématique : cela peut être une question ou un objet non nécessairement formellement présenté. Ces sujets sont par la suite interprétés par les théories, de sorte à fournir des objets sujets qui, eux, sont définis mathématiquement et sont en jeu dans les principaux théorèmes et questions de la théorie mathématique.

produire une dialectique entre des modèles et des modelés. Cette dialectique, nous l'avons déjà largement commentée.

La véritable question qui reste, et qui me semble bien difficile à trancher, est celle de la nature intentionnelle d'une preuve. Une preuve mathématique peut-elle porter une intention géométrique ?

Il nous semble que oui : nous avons bien des preuves faisant intervenir des gestes géométriques (comme une trivialisation locale), et c'étaient des éléments que nous avons utilisés dans notre caractérisation : la détection de tels gestes géométriques nous donnait une indication sur l'intention géométrique.

Cependant, il y a une question fondamentale, bien que relevant de l'humain, que nous devons poser : comment faisons-nous pour décider de la présence d'un geste géométrique, et d'une intention géométrique ?

4.2 Gestes et intentions géométriques

Pour poursuivre cette discussion, il me faut détailler un peu plus la distinction entre une *intention géométrique* et un *geste géométrique*.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait qu'une simple mention du terme « intention géométrique ». Le développement qui va suivre expliquera pourquoi ce terme était absent, et pourquoi j'ai préféré à cela l'étude des gestes géométriques.

Une métaphore qui me semble pertinente pour illustrer ces deux concepts, est la suivante. Un musicien, lors d'une performance, produit des sons, que l'on dit musicaux. Cette production, est faite par les *gestes* musicaux. Cette production des sons peut être directe, ou indirecte : la manipulation de l'instrument est directement liée au musicien, mais l'acoustique d'une salle de concert et les réactions du public sont plus indirectes.

Mais une performance musicale ne se réduit pas à la production des sons. Le reste est dépendant des *intentions* musicales du musicien. Je ne dis pas là que gestes et intentions sont exclusifs et complètent le tableau d'une performance musicale. Je dis que l'ensemble des gestes musicaux ne suffit pas à rendre compte totalement d'une performance musicale ; et que ce qui reste, est produit direct des intentions du musicien.

Les gestes sont eux-mêmes en grande partie produits des intentions. Ils ne le sont pas tous : par exemple les erreurs, l'acoustique ou encore la réponse du public ne sont pas des produits des intentions du musicien.

Les intentions du musicien sont ces données psychologiques qui font que le musicien est dans une activité de production musicale. Une intention musicale correspond à la phrase « je veux interpréter cette œuvre ». Un geste musical correspond à la phrase « j'engendre les sons ».

Cette métaphore, que j'avoue volontiers incomplète, sera j'espère un point d'appui pour l'étude des intentions et gestes géométriques.

Dans sa production mathématique, un mathématicien met en œuvre un certain nombre de gestes mathématiques. Ce sont les développements mathématiques : les preuves, les définitions, les théorèmes, les conjectures.

Ces gestes sont rendus possibles par : les mathématiques elles-mêmes * et le mathématicien. Les possibilités mises en œuvres par le mathématicien, c'est-à-dire les actions propres et créatrices du mathématicien, ne sont possibles que parce qu'il en a *l'intention.*

C'est donc ce que j'appellerai une *intention mathématique* : c'est la condition de possibilité en le mathématicien à la production d'un geste mathématique. C'est en cela quelque chose d'intrinsèque au mathématicien, et c'est pour cela qu'il est si difficile d'en faire une analyse poussée. Les *gestes mathématiques* sont quant à eux la condition de possibilité d'un développement mathématique.

Je me permets d'insister sur un point : une intention ne produit pas de geste directement et un geste n'est pas toujours de l'œuvre d'une intention. Cependant, le but d'une intention est bien de produire un geste.

Un exemple s'impose. Lors d'un calcul, on peut discerner ce qui relève du geste et ce qui relève de l'intention. Ce calcul n'est possible que parce qu'il y a un certain corpus mathématique le permettant, et parce qu'il y a un mathématicien pour le produire. Lorsque le mathématicien exprime « je calcule », il exprime en fait son *intention* mathématique. Lorsque le mathématicien passe d'une expression à une autre, il exprime le résultat d'un *geste* mathématique.

Maintenant que nous avons élaboré ce vocabulaire, il nous faut revenir à notre problème initial ; à savoir la question de la décision de la présence d'un geste géométrique, et d'une intention géométrique.

Tout d'abord, cette question fait bien sens. Il est en effet possible de donner la qualité « géométrique » à un geste ou à une intention. Un geste géométrique, ça n'est jamais qu'un geste mathématique répondant à la caractérisation de la géométrie. Une intention géométrique, c'est une intention mathématique et qui se veut également géométrique, c'est-à-dire dont le but est de produire des gestes géométriques.

Comment pouvons-nous déceler de telles présences de gestes ou d'intentions géométriques ? À notre disposition, nous n'avons que des discours, qui sont des éléments d'expression. Si les gestes sont bien exprimés dans les discours, il est plus difficile de constater des intentions dans l'expression. Je propose donc de distinguer *l'intention psychologique* de *l'intention exprimée.* La première est le phénomène psychologique qui est l'essence de l'intention, la seconde est la trace exprimée par le mathématicien.

Il est très difficile, peut-être même non sensé, de vouloir rendre compte des intentions psychologiques mathématiques. Elles sont l'affaire d'une psychologie

*. À supposer qu'il existe effectivement une entité pouvant être assimilée aux mathématiques, ce qui est une forme de platonisme vis-à-vis de cette question. Mais je crois ici, qu'il faut garder à l'esprit qu'un mathématicien ne fait des développements mathématiques que parce qu'il a la conviction qu'ils sont possibles mathématiquement, et cette possibilité est située hors de lui.

du mathématicien, plutôt que d'une épistémologie des mathématiques. C'est pourquoi jusqu'à présent, nous n'avons jamais traité la question du rôle du mathématicien dans la production d'une théorie géométrique.

En revanche, les intentions exprimées et les gestes mathématiques peuvent être reconstitués et compris philosophiquement. Du fait qu'ils sont exprimés dans le texte mathématique, et que leur nature est déterminée par cette expression *, on peut y fonder une analyse.

Le moyen par lequel on rend compte de la qualité géométrique d'un geste mathématique, est précisément la caractérisation que nous avons étudiée. Cette caractérisation permet de décider lorsque le développement mathématique à nos yeux est géométrique, ou non. La qualité géométrique d'une intention exprimée est, elle, établie en fonction de ce que l'intention exprime : si elle exprime la volonté de produire un geste géométrique, alors il s'agit d'une intention exprimée géométrique.

À noter, ici, qu'il y a une subtilité à relever. La caractérisation portait sur les *théories* mathématiques, qui ne sont pas des gestes : ce sont des ensembles de gestes mathématiques. Mais on dira sans peine qu'un geste est géométrique s'il respecte les conditions auxquelles il est soumis.

Par exemple, le geste de considérer une trivialisation locale, ou de définir une variété par des cartes, est évidement géométrique. En revanche, le geste $1 + 1 = 2$ n'est pas géométrique, il est seulement mathématique (bien que ce geste puisse s'inscrire dans une théorie géométrique).

4.3 Géométrisation des théories

Revenons-en à présent au véritable but de cette section, à savoir la question de possibilité de géométrisation d'une théorie mathématique (non initialement géométrique).

Pour rappel, une théorie mathématique n'est jamais qu'un discours. Ainsi, il fait bien sens de parler d'une théorie que l'on rendrait géométrique. Il s'agit ici de modifier un discours pour en apporter une qualité géométrique. Rappelons aussi que l'identité d'une théorie réside en le sujet qu'elle interprète. Ainsi, on peut bien parler d'une transformation d'une théorie sans en altérer son identité. L'interprétation du sujet peut rester identique, alors que le reste de la théorie peut devenir géométrique.

Comme nous l'avons discuté, la géométrisation (ou dégéométrisation) d'une théorie se fait à un niveau qui n'est pas fondamental à la théorie : on ne peut pas modifier l'interprétation du sujet de la théorie. Donc si celui-ci n'est pas de nature géométrique, ça n'est pas remédiable. Mais, et vous l'aurez noté, notre caractérisation de la géométrie contemporaine ne traite pas de l'interprétation du sujet d'une théorie, mais de son contenu mathématique.

La donnée la plus sensible à l'interprétation du sujet est la définition des objets sujets. Mais cette définition n'en dépend pas entièrement, elle dépend

*. Pour revenir à la métaphore musicale : un son entendu est bien un son qui a été joué.

aussi des intentions mathématiques du mathématicien. Par exemple, on peut définir une variété par une équation, sans faire apparaître le fait qu'elle puisse être définie par des cartes locales, passant donc d'une définition non géométrique à une définition géométrique.

Peut-il arriver qu'un sujet soit interprété de sorte à ce qu'il soit parfaitement impossible d'avoir un objet sujet géométrique ? C'est là une question qu'il est légitime de poser. Gardons à l'esprit que c'est une possibilité, mais que du fait de sa nature, on ne peut pas en dire beaucoup plus.

Le niveau auquel il faut donc agir est celui des développements mathématiques mêmes, à savoir les gestes mathématiques et les intentions exprimées. Il faut pouvoir modifier suffisamment de gestes mathématiques pour que la théorie remplisse les conditions de la caractérisation.

Pour résumer, il est possible de géométriser une théorie, à deux conditions. La première est que l'interprétation du sujet soit suffisamment peu contraignante pour permettre l'émergence d'objets sujets géométriques (c'est-à-dire respectant la caractérisation) ; la seconde est qu'il faut pouvoir modifier suffisamment de gestes mathématiques pour qu'ils soient géométriques et permettent à la théorie de devenir également géométrique.

Cette production d'une nouvelle théorie (d'un nouveau discours) mathématique, qui serait alors devenue géométrique est de l'œuvre du mathématicien : elle demande la production de gestes mathématiques par des intentions géométriques nouvelles.

C'est pourquoi nous nous bornons à l'étude des conditions de possibilité de la géométrisation, et non des moyens de géométrisation. Cette étude des moyens demanderait à ce que l'on explique comment les gestes mathématiques sont produits et à quelles conditions. Mais cela dépasse largement le cadre de notre étude.

Finalement, l'étude des intentions géométriques se fait par une double enquête. Tout d'abord par l'étude des intentions exprimées, dont l'existence et la fréquence dépendent grandement du style d'écriture de l'auteur (et de son niveau de conscience de ses intentions). Cela se fait aussi, et surtout, par l'étude des gestes mathématiques. Ces gestes, s'ils sont géométriques, caractérisent un développement mathématique comme étant géométrique. Les gestes ne permettent pas de revenir directement à l'intention mathématique, du fait de la nature de ces intentions, mais ils sont un indicateur essentiel et sont le seul indicateur responsable de la qualité géométrique d'une théorie.

L'intention est la condition de possibilité du geste, mais la qualité géométrique d'un geste ne vient pas nécessairement d'une qualité géométrique de l'intention. Cependant le lien entre les deux, bien que non causal, n'est évidement pas inexistant. Il faudrait produire une étude simultanément psychologique, mathématique et philosophique pour pouvoir déterminer la nature d'une intention (nous n'avons accès qu'aux intentions exprimées, qui ne déterminent pas complètement les intentions de l'auteur – parfois même inconscientes). Cependant, cette limitation ne retire pas l'intérêt de notre étude : nous progressons malgré cette difficulté vers une meilleure compréhension des intentions géométriques, en nous adressant aux gestes et intentions exprimées.

4.4 Exemple de géométrisation

Même s'il est trop difficile ici de donner une étude des moyens de géométrisation, on peut montrer que cela est, en revanche, bien possible.

Pour cela, je propose que nous reprenions un contre-exemple qui a été traité : la théorie de SYLOW des groupes. Je vais maintenant proposer un discours mathématique [*] vérifiant les deux choses suivantes : il traite du même sujet que la théorie de SYLOW, à savoir le théorème de SYLOW ; il est géométrique.

Je soutiens donc que cette théorie produit un exemple à la question que nous avions adressée (p. 51), sur la possibilité de la coexistence de deux théories ayant une variabilité sémantique donnant deux résultats différents par la caractérisation.

DÉFINITION 1

Si G est un groupe d'ordre $p^n m$ avec m premier à p, alors un sous-groupe de G d'ordre p^n est appelé un p-sous-groupe de SYLOW de G.

On peut maintenant montrer le théorème de SYLOW. On se concentre une fois de plus sur la partie du théorème concernant l'existence, les autres points étants moins difficiles à montrer, ils se prêtent moins à une nouvelle exposition.

THÉORÈME 2 (SYLOW)

Soit G d'ordre $p^n m$ avec m premier à p. Alors il existe un p-sous-groupe de SYLOW à G.

La preuve fait intervenir une dialectique entre modèle et objet modelé.

Les modèles sont les groupes $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$. Un tel groupe a un p-SYLOW : le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. [†]

Le théorème est donc vrai dans le cas du modèle $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$. Il reste à montrer comment modeler les autres groupes sur ce modèle, et comment le théorème reste vrai après modelage.

Il s'agit de dire que G est modelé sur $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$ si c'est un sous-groupe de ce dernier. Pour modeler un groupe G d'ordre $p^n m$ sur $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$, il suffit de l'injecter dans $\mathfrak{S}_N$, le groupe des permutations de l'ensemble à $N = p^n m$ éléments. Maintenant on envoie une permutation sur la matrice qui permute les

∗. Dont je n'ai pas la paternité. Les idées exposées semblent venir d'un cours de SERRE. Le rapport des mathématiciens à la paternité des idées étant un sujet complexe, notamment lorsqu'il s'agit de nouvelles démonstrations de théorèmes classiques, il est de toute façon difficile de retracer cette paternité.

†. La preuve de ce fait est classique : l'ordre du groupe est $(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$ et l'ordre du sous-groupe est bien $q^{n(n-1)/2}$.

éléments de la base canonique, et cela donne une injection de G dans $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$, avec $q = p^n$.

La démonstration du théorème suit alors la démonstration du fait suivant.

Lemme 3

Si H est un p-Sylow de G et si K est un sous-groupe de G, alors il existe $g \in G$ tel que $gHg^{-1} \cap K$ est un p-Sylow de K.

Ce lemme montre que l'existence d'un p-Sylow d'un groupe K modelé sur G est conséquence de l'existence d'un p-Sylow sur G. C'est donc une propriété géométriquement locale * : elle vient des qualités du groupe sur lequel K est modelé.

La démonstration du théorème se conclut en prenant G dans le rôle de K et $\mathrm{GL}_N(\mathbf{F}_q)$ dans le rôle de G. Prouvons donc le lemme.

Preuve

Le groupe K agit à gauche sur les classes à gauche G/H par $k \cdot (gh) = (kg) \cdot h$. Le stabilisateur d'une classe gH est $K_{gH} = gHg^{-1} \cap K$. Mais $m = |G/H|$ est premier avec p donc, par la formule des classes, il existe une classe gH telle que p ne divise pas l'indice $[K : K_{gH}]$.

Puisque K_{gH} est contenu dans gHg^{-1}, qui est un p-groupe, K_{gH} est lui-même un p-groupe, et donc un p-sous-groupe de Sylow de K. ■

*. L'appellation *locale* peut sembler étrange, du fait que le modèle n'est pas un sous-groupe du modelé, mais le contraire. Cependant, si on imagine un ensemble que l'on prend stable par le groupe modèle, alors il sera effectivement stable par le groupe modelé. De sorte que la stabilité par le modèle est bien plus rigide que par le modelé, exprimant donc un « rapetissement » de l'ensemble lorsque l'on passe d'une stabilité par le modelé au modèle.

Annexe 1

Sur l'ontologie des mathématiques

L'un des débats les plus commentés de la philosophie est celui de l'ontologie des mathématiques. *Qu'est-ce qu'un objet mathématique ?* Cette question, du fait d'un sujet fort général et essentiel, intervient légitiment dans tout développement philosophique des mathématiques.

Mon mémoire n'avait pas pour but de traiter cette question, cependant les outils épistémologiques que je développe au chapitre 4, en particulier pages 46-52, me semblent pouvoir apporter un éclairage sur le débat de l'ontologie.

De ce débat large, je ne pourrai malheureusement pas développer dans le détail toutes les différentes positions, du fait du grand nombre des possibles. Le lecteur soucieux peut se reporter par exemple aux points de départs [Hac14] et [DHM12]. Je retiendrai les positions suivantes, que je vais décrire en quelques phrases.

La position platonicienne. Les objets mathématiques sont des entités idéales existants dans un monde spécial, le monde des Idées. Les mathématiques permettent à l'humanité d'accéder à ce monde, distinct du monde physique.

La position platonicienne permet de rendre compte de l'impression de réalisme qui peut intervenir lors d'une pratique des mathématiques. La préexistence des objets mathématiques dans le monde des idées permet de penser leur découverte et non leur création.

Notons aussi que les objets mathématiques sont pensés comme des entités idéales. Mais le mot « idéal » peut en réalité se comprendre de deux façons : ou bien les objets mathématiques sont par essence non soumis aux imperfections du monde de la nature (le cercle tracé au tableau est imparfait, mais le cercle qu'il représente, lui, est parfait), c'est là la position platonicienne classique, ou bien les objets mathématiques sont par essence des idées, c'est-à-dire des produits de la conscience.

Généralement, cette seconde interprétation du mot « idéal » est difficilement acceptée, et ne porte pas l'adjectif platonicienne. Elle laisserait penser que les objets mathématiques sont créés par la conscience et donc ne seraient pas objectifs. Mais cette déduction est fausse : la conscience peut être contrainte par autre chose que la pure subjectivité, donnant lieu alors à de l'objectivité. Cette position existe chez Kant dans sa première critique, on la retrouve sous une certaine forme chez [DHM12, p. 451] dans leur conclusion : "*Mathematics is an objective reality that is neither subjective nor physical. It is an ideal (i.e., nonphysical) reality that is objective (external to the consciousness of any one person). In fact, the example of mathematics is the strongest, most convincing proof of the existence of such an ideal reality.*".

Il est utile aussi de remarquer la position platonicienne d'Alain Connes, qui a souvent été choisi (peut-être à tort) comme représentant de la position platonicienne chez les mathématiciens. La référence classique est son entretien avec Jean-Pierre Changeux [CC08]. Une analyse de sa position est proposée dans [Hac14]. Connes est cependant plus extrême dans sa position dans le sens, où, il considère que le monde physique n'est qu'une petite partie du monde mathématique. Il s'agit donc de dire qu'en plus d'être idéaux, les objets mathématiques ont la même réalité que les autres objets naturels, et ces derniers sont mêmes des cas très particuliers d'objets mathématiques.

La position structuraliste. Les structures mathématiques (groupe, anneau, etc.) sont les essences des objets mathématiques. Seules les structures ont une existence et elles expliquent (au sens du latin *explicatio*) toutes les occurrences d'objets mathématiques.

Cette position est souvent associée, et je crois assez justement, à la tradition que le groupe Bourbaki a incarnée. Cette position souligne le fait que dans la pratique des mathématiques, il s'agit toujours d'étudier les propriétés de structures (l'étude des relations, plutôt que des occurrences). Ces structures sont décrites par des axiomatiques, et les objets manipulés vérifient certaines de ces axiomatiques.

Elle souligne aussi le fait qu'un objet mathématique serait d'autant plus intéressant qu'il est rigide ou qu'il possède des structures. * Le structuralisme met en avant le caractère technologique : les structures permettent d'étudier des objets mathématiques, du fait de l'existence de propriétés dérivables de ces structures.

La position structuraliste considère que seules les structures sont douées d'une existence tangible, bien qu'elles puissent ne pas exister en dehors de nous. Ce *sont* les objets d'étude des mathématiques. Ainsi, la théorie des groupes est un exemple de théorie dominante, aux yeux de cette position, du fait de sa présence dans un très grand nombre de théories mathématiques.

∗. C'est une drôle d'expression, « posséder une structure ». En mathématiciens, on l'emploie bien souvent, par exemple pour dire « tel ensemble a une structure de groupe ». Être structuré est ainsi une qualité, et non une finalité constitutive. Il ne viendrait pas à l'esprit de dire « tel ensemble s'est structuré comme groupe » ou bien « la théorie des groupes structure cet ensemble ». Il s'agit peut-être de dire, que le fait que tel ensemble puisse être conçu comme groupe, est une qualité de cet ensemble venant de notre analyse, et non d'une présence naturelle *a priori*. C'est là, à mon sens, une trace du platonisme : l'ensemble étant existant *a priori*, il existe en dehors du conscient, bien que la structure, elle, soit de notre œuvre.

La position nominaliste. Les objets mathématiques n'ont d'existence qu'à travers l'interprétation des signes et symboles mathématiques, et des règles formelles bien précises qui régissent leur emploi. Ainsi, seules les écritures ont une existence physique.

La position nominaliste cherche à rendre compte du caractère formel des mathématiques, c'est-à-dire de leur forme d'expression. Les arguments mathématiques sont, d'après eux, valables selon leur validité formelle (les règles de la logique). Les mathématiques seraient alors un jeu de symboles dont les règles dictées suffisent complètement à déterminer ce qui est effectué.

Le principal défaut de cette position est qu'elle ne rend pas compte de la pratique des mathématiques : il est très rare d'écrire une preuve formellement complètement écrite, et il est encore plus rare de pratiquer les mathématiques avec une telle rigueur tout du long d'un raisonnement. La plupart des preuves mathématiques sont à un niveau plus élevé que celui des quantificateurs de la logique formelle.

Pire, il semblerait que dans bien des cas il soit humainement impossible de faire la traduction vers un langage logiquement soutenu. On pensera par exemple à n'importe quelle isotopie de nœuds présentée en dessin, parfaitement acceptable mais humainement impossible à décrire en équations.

Cependant, cette position a la qualité de rendre compte de l'ontologie des objets mathématiques de façon simple : ce sont des écritures. Les objets mathématiques sont incarnés par des symboles spéciaux, dont le mode d'existence est régi par les règles de la logique formelle.

Il existe bien évidemment un grand nombre de variations, et même de positions qualitativement différentes mais peu représentées. Je crois cependant que ces trois positions, telles que je les ai décrites, révèlent un nombre représentatif de positions.

Un grand nombre de mathématiciens se disent platoniciens, car cette position rend compte de leurs sensations dans l'expérience mathématique. Mais la petite histoire dit qu'un mathématicien est platonicien pendant sa pratique, et nominaliste le reste du temps, car le nominalisme permet d'expliquer ce que sont les objets mathématiques sans avoir à recourir à un monde des idées, fort étranger au sens commun.

Je vais à présent tenter de rendre compte synthétiquement de ces positions avec l'usage des positions épistémologiques que j'ai décrites auparavant. Cet éclairage, je le crois synthétique car il permet de rendre compte de toutes ces positions comme étant des cas particuliers d'une situation plus générale.

A Sur les théories mathématiques

J'ai souligné de nombreuses fois au chapitre 4 un choix bien particulier quant au statut des *théories* mathématiques : je les considère comme des discours, ayant une qualité bien spéciale (à savoir être un discours mathématique).

Cette hypothèse initiale, je ne vais pas la rediscuter, mais il m'a semblé que l'argument le plus important permettant de la soutenir est le suivant : nous n'avons affaire qu'à des discours lors de nos appréhensions de théories mathématiques (que ça soit des écrits ou des oraux ou des formes mixes).

Nous avions également longuement discuté du rapport d'une théorie mathématique à son *sujet* mathématique. J'avais souligné au chapitre 4 (notamment page 47) qu'une théorie se forge initialement selon une *interprétation* de son *sujet* mathématique. Cette interprétation donnait notamment lieu à la formation de ses *objets sujets* qui sont, je le rappelle, les principaux objets mathématiques employés dans la théorie.

J'utilisais jusqu'alors le terme « objet mathématique » assez différemment de la présente section. Il s'agissait par ce terme d'indiquer un objet mathématique qui soit logiquement formellement valide. [*]

Je vais donc préférer cette dernière expression quand je voudrai utiliser ce sens, qui doit être gardé à l'esprit comme différent de celui de l'expression « objet mathématique » que j'utilise pour la question de l'ontologie des mathématiques.

Le point qui m'a semblé essentiel est qu'un sujet mathématique n'est pas nécessairement revêtu d'une enveloppe formelle mathématique logiquement valide. Il se peut (sans que cela soit une obligation) qu'un sujet mathématique soit mal mathématiquement défini. Ainsi, l'un des gestes les plus importants en épistémologie des mathématiques consiste en l'étape d'interprétation. [†] Cette étape, je la désignerai par (EI).

Mais une fois cette étape d'interprétation dépassée, la théorie articule alors un discours mathématique sur des objets mathématiques formellement logiquement valides (cela est pensé comme étant une condition nécessaire pour l'attribution de la qualité mathématique d'un discours). Cette partie du discours mathématique qui est formellement valide, contient en elle bien souvent, en particulier, les preuves. Je désignerai par (AF) cette articulation formellement valide d'arguments.

∗. La façon par laquelle ils sont considérés comme étant valides me semble dépendre de la culture de la communauté mathématicienne étudiée, et dépasse donc à mon avis le cadre de notre discussion. Nous allons donc raisonnablement supposer que cette évaluation de la qualité d'être logiquement formellement valide est une boîte noire dont les mathématiciens ont la connaissance et l'usage, tout en sachant qu'elle dépend du contexte social.

†. Notons, au passage, que l'interprétation n'a pas nécessairement à être précédente temporellement aux développements mathématiques. Il arrive bien souvent que la « bonne définition » arrive après un long travail mathématique. Cependant, l'interprétation précède le développement d'un point de vue de la structuration argumentative, qui relève bien de l'épistémologie.

B Sur l'étape d'interprétation (EI)

Essayons de décrire un peu plus précisément une épistémologie de (EI). Le but de (EI) est le suivant : un certain sujet mathématique doit subir une certaine transformation, que je noterai (T), de sorte que des objets mathématiques logiquement formellement valides et des problématiques soient formulés en accord avec le sujet initial selon l'auteur (le mathématicien). (La question de la réception de l'interprétation par la communauté mathématique ne m'intéresse pas ici.)

Ignorons pour le moment l'issue de (EI), pour nous concentrer sur la transformation (T). Bien comprendre cette transformation nous permettrait de comprendre comment une interprétation peut donner lieu à des mathématiques à partir d'un sujet. Mais remarquons que le fonctionnement de (T) relève de la psychologie, et qu'il nous est bien difficile de pouvoir argumenter sur ce fonctionnement sans faire appel à des arguments autres que philosophiques. Nous allons donc nous intéresser à *l'épistémologie* de (T), j'entends par là au rôle précis et ontologiquement étudié de (T) dans une théorie mathématique.

La transformation d'un sujet mathématique, par un mathématicien, donne lieu à un contenu mathématique formellement valide. Cela signifie bien qu'il y a eu transformation puisque l'antécédent est d'une nature non nécessairement égale à la nature de l'image par la transformation. Il y a donc un changement de qualité ontologique par (T), de sorte à ce que (T) ait effectivement un intérêt : si (T) ne modifiait pas l'ontologie d'un sujet mathématique, alors ou bien un objet mathématique ne serait pas nécessairement bien défini mathématiquement, ou bien un sujet mathématique devrait toujours être bien défini mathématiquement. Mais aucune de ces deux issues n'est en accord avec notre argumentation, et j'écarte donc cette possibilité.

Une bonne étude de (EI), à travers celle de (T), devrait maintenant répondre à la question de l'ontologie de l'antécédent et de l'image : qu'est-ce qu'un sujet mathématique ? qu'est-ce qu'un objet mathématique formellement valide ? C'est donc ici qu'intervient une exposition de la position qui me semble la plus naturelle dans ce contexte.

Je soutiens qu'un sujet mathématique est *par essence une idée mathématique*. Ce sujet, étant soumis à une interprétation, ainsi qu'à une reformulation pour être formellement valide, a je crois, en effet, *la nature d'une idée et une qualité mathématique*. En ce sens, un sujet mathématique appartient au monde des idées.

Il me faut illustrer le fait qu'un sujet mathématique est par essence une idée mathématique (non nécessairement formellement valide aux yeux de la logique).

L'exemple que je souhaite exposer est le suivant. Le sujet mathématique est le suivant : *l'étude du cercle*. Notez qu'en donnant ce sujet, je suis bien évasif et je pourrais vous surprendre : je parle *du* cercle, alors même que ce terme n'est pas clair. Cela est normal, un sujet mathématique, je le rappelle, n'est pas nécessairement bien défini mathématiquement, et cela n'est, en effet, pas le cas ici.

Les théories mathématiques qui pourraient en être tirées dépendent de la façon par laquelle j'interprète ce sujet. Plus précisément, ils dépendent de *l'idée* que j'ai « *du* cercle ». Par exemple, je pourrais considérer le cercle sous l'œil topologue : la seule courbe topologique fermée ; je pourrais aussi considérer le cercle algébriquement en étudiant l'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans un anneau ; je pourrais encore considérer le cercle comme étant l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

Aucune de ces interprétations n'est identique à une autre. La topologique n'est certainement pas la même que les deux autres (pensez à une petite perturbation qui retirait la possibilité d'algébriser) et la deuxième diffère de la troisième en considérant par exemple $x^2 + y^2 = 1$ sur l'anneau $\mathbf{C}[x, y]$ plutôt que $\mathbf{R}[x, y]$.

À chaque fois, ce qui est remarquable, c'est que (T) a transformé mon sujet initial en des objets mathématiques logiquement formellement valides. Et mon sujet initial a gardé une correspondance avec les objets obtenus, du fait que j'en avais une *idée* mathématique préalable. En d'autres termes, *(T) a permis d'exprimer mathématiquement les idéalisations possibles que je me fais du sujet.* (T) a donc transformé une idée mathématique en un objet mathématique formellement valide aux yeux de la logique, c'est pourquoi je soutiens que c'est un fait général que les sujets mathématiques sont de l'ordre des idéalités mathématiques.

Il nous faut remarquer et lever une certaine difficulté conceptuelle, qui vient du fait que nous n'avons pas élucidé complètement la nature d'un sujet mathématique. En effet, j'ai dit qu'un sujet mathématique était par essence une idée mathématique, du fait que le sujet mathématique réside en partie en le mathématicien qui le pense.

Lorsque je parle « du cercle », la signification de cette expression dépend de l'interlocuteur. Si bien qu'il n'existe en fait pas de telle chose qu'un sujet mathématique indépendamment d'un esprit, mais seulement des provocations subjectives : je provoque en ces termes l'apparition d'une idée chez mon interlocuteur. C'est aussi pour cela que (T) est si importante : il faut passer d'une provocation d'une idée à la manipulation d'objets dont l'identité est partagée.

Les sujets mathématiques sont donc bien en essence des idées mathématiques, car les sujets mathématiques n'existent pas entièrement sans être conçus par un esprit. Et cette conception par esprit donne exactement lieu à une idée mathématique, qui est donc je crois essentielle au sujet mathématique.

Une objection peut ici être formulée. J'ai précisé à plusieurs reprises qu'un sujet mathématique peut tout de même être mathématiquement bien défini (j'entends par là le fait d'être logiquement formellement valide). Cela est-il seulement compatible avec mes développements qui précèdent ? C'est bien le cas, puisqu'un sujet peut très bien provoquer une même idée chez des interlocuteurs différents, sans que cela empêche le fait qu'une idée a pour fonction de provoquer la subjectivité. L'unicité de l'idée mathématique n'empêche pas le fait qu'il s'agit bien en essence d'une idée mathématique (au sens précédent).

Nous avons longuement développé l'aspect idéal des mathématiques en inspectant l'ontologie des sujets mathématiques. Il nous faut maintenant discuter de l'ontologie des objets mathématiques logiquement formellement valides, et pour cela je propose de nous intéresser plus spécifiquement à (AF).

C Sur l'articulation formellement valide (AF)

Si l'on suit le déroulement d'une théorie mathématique, (AF) consiste en le moment où le sujet mathématique a été interprété (de sorte à ce que la théorie puisse réellement commencer à être exposée en ayant sa qualité mathématique) et où des développements logiquement formellement valides sont déclinés.

(AF) a donc un statut bien particulier puisqu'il est simultanément un moment d'expression et une exposition soucieuse d'une validité logique. Si l'on se penche sur la structure argumentative, on remarque également que des éléments sont très discernables : ce sont les objets mathématiques bien définis mathématiquement, dont une partie provient de (T).

Ainsi, pour étudier (AF), nous aurons à étudier un peu plus précisément, d'une part les objets mathématiques logiquement valides dans leur forme, et les formes des arguments.

Ce dernier point est peut-être le plus simple à aborder. Les formes des arguments en mathématiques sont bien cataloguées. Le *modus ponens* est peut-être le plus important. Soulignons aussi l'existence du raisonnement inductif qui se base sur une conséquence de l'axiomatique des entiers naturels.

Ces arguments qualifiés de valides selon leur forme, sont pour une grande part responsables de l'identité des mathématiques. J'entends par là qu'il n'y aurait pas de mathématiques si les arguments mathématiques étaient de formes différentes. On reconnait ainsi les mathématiques par leur structure argumentative relativement stable dans le temps, bien que les exigences vis-à-vis de la conformité envers cette structure connaissent des changements importants selon les époques et les pratiques.

Le dernier point ontologique que j'aimerais souligner concerne donc les objets mathématiques logiquement formellement valides. Je crois que ce point permettra de rendre compte du tableau épistémologique que j'essaie de peindre depuis plusieurs pages afin de rendre compte du débat sur l'ontologie des mathématiques.

Les objets mathématiques valides (vous comprendrez « logiquement formellement valides ») ont ceci de particulier dans nos mathématiques occidentales qu'ils sont systématiquement munis de structures supplémentaires à celle d'ensemble * : les structures de groupes, d'anneau, d'espace topologique en sont des exemples importants.

Ces structures permettent la naissance des arguments : elles donnent les outils formels permettant d'étudier les objets mathématiques valides particuliers. Nos mathématiques contemporaines ont ceci de particulier, et cela est largement accepté, qu'elles préfèrent étudier les relations entre les objets plutôt que les particularités individuelles. C'est donc naturel que les structures mathématiques soient apposées aux objets mathématiques valides, puisqu'elles permettent l'argumentation (comme dit) et qu'elles s'inscrivent dans cette volonté épistémologique d'abstraire les vérités portant sur des objets mathématiques valides de leurs occurrences ponctuelles pour avoir des discours qui ne concernent que les relations entre différents objets mathématiques valides.

D Synthèse des différentes positions

Je vais à présent proposer une synthèse des différentes positions que j'ai exposées en début de section. Cette synthèse consiste à montrer où se situent ces positions dans le cadre épistémologique plus large que j'ai proposé.

L'idée consiste à dire que ce débat est indécidable du fait que la notion « d'objet mathématique » n'a pas de corps réel. Généralement, lorsqu'un débat si profond, si important, possède tant de positions contradictoires depuis si longtemps, c'est que les termes du débat ont été mal posés.

En lieu et place des objets mathématiques, j'ai utilisé dans mon tableau épistémologique les notions de sujet mathématique et d'objet mathématique valide. Cette ramification est, je crois, essentielle pour mieux comprendre comment le débat de l'ontologie se situe et propose en fait une solution synthétique.

La position platonicienne. La position platonicienne se situe au niveau de notre étude de (T) dans (EI). Les objets mathématiques, dans l'interprétation de cette position, sont les sujets mathématiques à travers les idéalités mathématiques qu'ils représentent.

On peut très bien soutenir que « le cercle » soit un objet mathématique, bien qu'il n'ait pas d'incarnation formelle valide. C'est un sujet mathématique qui existe à travers des idéalités. Ce sont les différents objets idéaux que les platoniciens prennent comme étant les objets mathématiques.

Les objets mathématiques valides sont, eux, distincts de ceux-là. Et, en effet, des platoniciens comme Connes considèrent que les objets mathématiques sont précédents aux objets structurés (voir les références données précédemment).

La position structuraliste. Les structuralistes concentrent leur intérêt en les structures mathématiques qui interviennent dans l'exposition des objets ma-

*. Ou bien à celle de catégorie, ou bien à celle de quelque soit la notion primaire de la logique utilisée dans la théorie mathématique en question.

thématiques valides. Ces structures permettent la naissance des arguments tels qu'ils sont jugés acceptables dans nos mathématiques occidentales actuelles.

La position nominaliste. Cette dernière position considère que le seul élément tangible sont les écritures des objets mathématiques valides, et que l'aspect logique de leurs formes explique pleinement ces objets.

C'est effectivement le cas si on considère que les objets mathématiques sont les objets mathématiques valides. Ces derniers sont bien incarnés par des écritures logiquement valides sur le plan formel.

Synthèse. Chacune de ces positions ne contredit donc pas les autres, une fois qu'on accepte le fait qu'elles interprètent (sans le dire) différemment le terme « objet mathématique ».

À titre personnel, je crois donc qu'il faut oublier ce terme, pour ne garder que celui de *théorie mathématique* (qui est, je crois, la seule chose tangible sur laquelle on peut baser une philosophie des mathématiques). Dans ce contexte, on peut très bien être simultanément platonicien, structuraliste et nominaliste.

Cette position synthétique consiste à considérer les idées mathématiques comme étant premières et essentielles aux mathématiques. En effet (T) est une étape nécessaire à l'élaboration d'une théorie, et donc l'idéalité mathématique précède l'objet obtenu par (T). Les objets obtenus sont structurés par des structures mathématiques qui sont elles aussi essentielles aux mathématiques, du fait qu'elles procurent les outils nécessaires à leurs études. Enfin, les mathématiques sont formelles dans le sens où la validité logique est regardée du point de vue de la forme des arguments, ce qui distingue bien les mathématiques : des mathématiques où les arguments ne seraient pas évalués uniquement selon leur forme ne seraient plus des mathématiques tel qu'on l'entend classiquement. Le sentiment « de ne pas avoir le choix », ou de découverte, généralement compris chez les platoniciens se retrouve dans le fait que dans un cadre axiomatique précisé et consistant, les preuves sont contraintes. Le rapport à l'idéalité mathématique dans ce sentiment se retrouve par le fait que (T) a transposé l'idéalité en un objet manipulable par des arguments formels.

Annexe 2

Citations complètes

A “What is a geometry ?”

Dans [Thu97], pages 179 et 180.

> What is a geometry ? Up till now, we have discussed three kinds of three-dimensional geometry : hyperbolic, Euclidean and spherical. They have in common the property of being as uniform as possible : their isometries can move any point to any other (homogeneity), and can take any orthonormal frame in the tangent space at a point to any other orthonormal frame at that point (isotropy). There are more possibilities if we remove the isotropy condition, allowing the space to have a grain, so to speak, so that certain directions are geometrically distinguished from others.
>
> An enumeration of additional three-dimensional geometries depends on what spaces we wish to consider and what structures we use to define and to distinguish the spaces. For instance, do we think of a geometry as a space equipped with such notions as lines and planes, or as a space equipped with a notion of congruence, or as a space equipped with either a metric or a Riemannian metric ? There are deficiencies in all of these approaches.
>
> The problem with using lines and planes is that they aren’t general enough. The five new geometries described in this section don’t have any good notion of a plane—there are no totally geodesic surfaces passing through certain tangent planes. Besides, even in Euclidean geometry, information about geometric shapes is not determined by incidence properties of lines and planes.
>
> Using congruence as the essence of the definition leads to an excessive proliferation of geometries. For instance, we would get different geometries by considering Euclidean space with the group of congruences consisting of translations, or the one consisting of horizontal translations together with vertical screw motions (where the amount of rotation is proportional to the vertical motion), and so on. Sometimes it is interesting to distinguish these different

structures, but for the broad picture these variations should all be considered under the category of Euclidean geometry.

Using distance to determine the geometry is likewise unsatisfactory. First, by simply rescaling something like $\mathbf{H}^3$ or S^3, we get different metric spaces. Even if we consider as equivalent all metric spaces that are isometric up to a constant scaling factor, many of the spaces have a whole family of homogeneous metrics (sometimes with varying degrees of homogeneity) which are not equivalent up to scaling. The three-sphere, for instance, has an interesting family of homogeneous metrics obtained from the usual metric by picking a Hopf fibration and contracting or expanding the lengths of the circles, while keeping the metric constant in the orthogonal directions.

The best way to think of a geometry, really, is to keep in mind these different points of view all at the same time. If we regard changes of the group of congruences that do not change the metric and changes of the metric that do not change the group of congruences as inessential changes in the geometry, and if we also consider two geometries the same when the sets of compact manifolds modeled on them are identical, we end up with a reasonable enumeration of geometries.

For logical purposes, we must pick only one definition. We choose to represent a geometry as a space equipped with a group of congruences, that is, a (G, X)-space.

Definition 3.8.1 (model geometry). A *model geometry* (G, X) is a manifold X together with a Lie group G of diffeomorphisms of X, such that :

(a) X is connected and simply connected ;

(b) G acts transitively on X, with compact point stabilizers ;

(c) G is not contained in any larger group of diffeomorphisms of X with compact stabilizers of points, and

(d) there exists at least one compact manifold modeled on (G, X).

Condition (a) selects one representative from each class of locally equivalent geometries having different fundamental groups ; since locally equivalent geometries are models for identical classes of manifolds (Exercise 3.3.1). Condition (b) means that the space possesses a homogeneous Riemannian metric invariant by G (Lemma 3.4.11), and that it is complete (see Proposition 3.4.15 and the paragraph following its proof). Condition (c) says that no Riemannian metric invariant by G is also invariant by any larger group. In particular, it selects at most one geometry of each isometry class of metric spaces. Another reason for condition (c) is that by enlarging

> the structure group G, we do not decrease the set of manifolds with that structure. Condition (d) is not phrased in an intrinsic way, but it is useful because it eliminates a whole continuous family of three-dimensional geometries that do not serve as models for any compact manifold.

Thurston présente (p. 181 de [Thu97]) les huit géométries modèles de la façon suivante.

> In enumerating three-dimensional model geometries (G, X), we will first look at the connected component of the identity of G — call it G'. The action of G' is still transitive, and the stabilizers G'_x of points $x \in X$ are connected. This is because the quotients $G'_x/(G'_x)_0$, where $(G'_x)_0$ is the component of the identity of G'_x, form a covering space of X. Since X is simply connected, the covering is trivial.
>
> Therefore G'_x is a connected closed subgroup of SO(3). Using the fact that a closed subgroup of a Lie group is also a Lie group, and therefore a manifold it is easy to see that there are only three possibilities : SO(3), SO(2) and the trivial group. The stabilizer G_x is a Lie group of the same dimension.
>
> **Theorem 3.8.4 (three-dimensional model geometries).** *There are eight three-dimensional model geometries (G, X), as follows :*
>
> *(a) If the point stabilizers are three-dimensional, X is S^3, $\mathbf{E}^3$ or $\mathbf{H}^3$.*
>
> *(b) If the point stabilizers are one-dimensional, X fibers over one of the two dimensional model geometries, in a way that is invariant under G. There is a G-invariant Riemannian metric on X such that the connection orthogonal to the fibers has curvature 0 or 1.*
>
> *(b_1) If the curvature is zero, X is $S^2 \times \mathbf{E}^1$ or $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{E}^1$.*
>
> *(b_2) If the curvature is 1, we have nilgeometry (which fibers over $\mathbf{E}^2$) or the geometry of $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbf{R})$ (which fibers over $\mathbf{H}^2$).*
>
> *(c) The only geometry with zero-dimensional stabilizers is solve-geometry, which fibers over the line.*

Après la preuve de l'énumération des géométries modèles possibles, Thurston effectue un commentaire (p. 189 dans [Thu97]).

> It is a curious fact that each of the eight three-dimensional model geometries is isometric to a three-dimensional Lie group with a left-invariant metric. All the Lie groups except for $\mathbf{H}^3$ are unimodular. The Lie group for $\mathbf{H}^3$ is the group of homotheties of the

> plane, which acts simply transitively as a group of isometries of upper half space. In every case but $\mathbf{H}^3$, the group of automorphisms of the geometry is the semidirect product of the simply connected Lie group with its group of isometric automorphisms.

B "Three Dimensional Manifolds"

Dans [Thu82], Thurston expose sa (fameuse) conjecture de géométrisation. Il y explique (p. 358) notamment comment agencer la notion de (G, X)-variété et celle de géométrie modèle.

> One way to think of a geometric structure on a manifold M is that it is given by a complete, locally homogeneous Riemannian metric. It is better, however, to define a geometric structure to be a space modelled on a homogeneous space (X, G), where X is a manifold and G is a group of diffeomorphisms of X such that the stabilizer of any point $x \in X$ is a compact subgroup of G. For example, X might be Euclidean space and G the group of Euclidean isometries. M is equipped with a family of "coordinate maps" into X which differ only up to elements of G. We make the assumption that M is complete. If X is simply-connected, this condition says that M must be of the form X/Γ, where Γ is a discrete subgroup of G without fixed points.
>
> There are precisely eight homogeneous spaces (X, G) which are needed for geometric structures on 3-manifolds. These eight homogeneous spaces are determined by the following conditions :
>
> (a) The space X is simply-connected. A manifold modelled on a non-simply-connected homogeneous space is also modelled on its universal cover.
>
> (b) The group G is unimodular, that is, there is a measure on G invariant by multiplication on the right or the left. Otherwise, X would possess a vector field invariant by G which expands volume, so there could be no (X, G)-manifolds which are compact or which even have finite volume.
>
> (c) G is a maximal group of homeomorphisms of X with compact stabilizers. If G were contained in a larger group G', then any (X, G)-manifold would be an (X, G')-manifold, so (X, G) would be redundant.
>
> We will describe these eight geometries in §4. For the moment, it will suffice to say that of these eight, hyperbolic geometry is by far the most interesting, the most complex, and the most useful. The other seven come into play only in exceptional cases.

C “Geometric manifolds”

En introduction du chapitre 3, [Thu97, p. 109], on peut lire :

> In chapter 1 we looked at a good number of manifolds. In doing this, we relied more on intuition and common sense than on definitions. It is now time to study manifolds a bit more systematically.
>
> Manifolds come to us in nature and in mathematics by many different routes. Very frequently, they come naturally equipped with some special pattern or structure, and to understand the manifold we need to “see” the pattern. At other times, a manifold may come to us naked ; by finding structures that fit it, we can gain new insight, relate it to other manifolds, and take better care of it.
>
> The fact that there are all these different grades, or flavors, of manifolds was not clearly understood during the early development of topology. Different constructions were perceived more as alternative technical contexts for doing topology than as building blocks for essentially different structures. One of the remarkable achievements of topologists over the past forty years has been to come to grips with these distinctions, which are, contrary to intuition, substantive : for example, topological, piecewise linear and differentiable manifolds are inequivalent in dimensions four and higher, although in dimensions two and three the distinctions collapse.
>
> Most of the myriad other possible structures — complex structures, foliations, hyperbolic structures, and so on — are considerably more restrictive than differentiable structures. These more restrictive structures can have great power in dimensions two and three.

Ensuite, dans la section *“Basic Definitions”*, Thurston développe :

> A *manifold* is a topological space that is locally modeled on $\mathbf{R}^n$.
>
> What it means to be locally modeled on $\mathbf{R}^n$ depends on what property, or pattern, of $\mathbf{R}^n$ we want to capture. The idea is to patch the manifold together seamlessly from small pieces of fabric having the given pattern. A pattern is described operationally, in terms of the transformations that preserve it ; by allowing chunks of $\mathbf{R}^n$ to be glued together only according to these transformations, we get a manifold with the desired pattern. The set of allowed gluing maps should satisfy some natural properties :
>
> **Definition 3.1.1 (pseudogroup).** A *pseudogroup* on a topological space X is a set $\mathcal{G}$ of homeomorphisms between open sets of X satisfying the following conditions :
>
> (a) The domains of the elements $g \in \mathcal{G}$ cover X.

(b) The restriction of an element $g \in \mathcal{G}$ to any open set contained in its domain is also in $\mathcal{G}$.

(c) The composition $g_1 \circ g_2$ of two elements of $\mathcal{G}$, when defined, is in $\mathcal{G}$.

(d) The inverse of an element of $\mathcal{G}$ is in $\mathcal{G}$.

(e) The property of being in $\mathcal{G}$ is *local*, that is, if $g : U \to V$ is a homeomorphism between open sets of X and U is covered by open sets U_α such that each restriction $g|_{U_\alpha}$ is in $\mathcal{G}$, then $g \in \mathcal{G}$.

It follows from these conditions that every pseudogroup contains the identity map on any open set ; the *trivial pseudogroup* is the one that contains these maps and no others. At the other extreme, the largest pseudogroup on $\mathbf{R}^n$ is the pseudogroup Top of all homeomorphisms between open subsets of $\mathbf{R}^n$. A *topological manifold* is one for which the gluing homeomorphisms are in Top — they need satisfy no further conditions. Such a space has the local topological structures of $\mathbf{R}^n$, but not more.

More generally, for any pseudogroup $\mathcal{G}$ on $\mathbf{R}^n$, a $\mathcal{G}$-*manifold* is a manifold for which the gluing maps lie in $\mathcal{G}$. Here is a more precise statement :

Definition 3.1.2 ($\mathcal{G}$-manifold). Let $\mathcal{G}$ be a pseudogroup on $\mathbf{R}^n$. A n-dimensional $\mathcal{G}$-manifold is a topological space M with a $\mathcal{G}$-*atlas* on it. A $\mathcal{G}$-atlas is a collection of $\mathcal{G}$-*compatible coordinate charts* whose domain cover M. A cover chart, or *local coordinate system*, is a pair (U_i, ϕ_i), where U_i is open in M and $\phi_i \colon U_i \to \mathbf{R}^n$ is a homeomorphism onto its image. Compatibility means that, whenever two charts (U_i, ϕ) and (U_j, ϕ_j) intersect, the *transition map* or *coordinate change*

$$\gamma_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} \colon \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$$

is in $\mathcal{G}$.

Toujours dans [Thu97], on peut lire page 125 :

It is convenient to broaden slightly the definition of a $\mathcal{G}$-manifold (3.1.2), by allowing $\mathcal{G}$ to be a pseudogroup on any connected manifold X, not just on $\mathbf{R}^n$. As long as $\mathcal{G}$ acts transitively, this does not give any new types of manifolds :

Exercise 3.3.1 (locality of $\mathcal{G}$-structures). Let $\mathcal{G}$ be a pseudogroup on any manifold X and $U \subset X$ any open subset such that for every $x \in X$ there is some element of $\mathcal{G}$ taking x into U. Let $\mathcal{G}_U$ be the subpseudogroup consisting of elements whose domain and range are

> contained in U. Show that every $\mathcal{G}$-manifold has a $\mathcal{G}_U$-stiffening unique up to $\mathcal{G}$-isomorphism.
>
> Many important pseudogroups come from group actions on manifolds. Given a group G acting on a manfold X, let $\mathcal{G}$ be the pseudogroup generated by restrictions of elements of G : see Exercise 3.1.8(a). Thus every $g \in \mathcal{G}$ agrees locally with elements of G : the domain of g can be covered with open sets U_α such that $g|_{U_\alpha} = g_\alpha|_{U_\alpha}$ for $g_\alpha \in G$. A $\mathcal{G}$-manfold is also called a (G, X)-*manifold*.

Dans la version des notes [Thu02], on retrouve la description des structures géométriques au chapitre 3, pages 27.

> A manifold is a topological space which is locally modelled on $\mathbf{R}^n$. The notion of what it means to be locally modelled on $\mathbf{R}^n$ can be made definite in many different ways, yielding many different sorts of manifolds. In general, to define a kind of manifold, we need to define a set $\mathcal{G}$ of gluing maps which are to be permitted for piecing the manifold together out of chunks of $\mathbf{R}^n$. Such a manifold is called a $\mathcal{G}$-manifold. $\mathcal{G}$ should satisfy some obvious properties which make it a *pseudogroup* of local homeomorphisms between open sets of $\mathbf{R}^n$:
>
> (i) The restriction of an element $g \in \mathcal{G}$ to any open set in its domain is also in $\mathcal{G}$.
>
> (ii) The composition $g_1 \circ g_2$ of two elements of $\mathcal{G}$, when defined, is in $\mathcal{G}$.
>
> (iii) The inverse of an element of $\mathcal{G}$ is in $\mathcal{G}$.
>
> (iv) The property of being in $\mathcal{G}$ is local, so that if $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ and if g is local homeomorphism $g\colon U \to V$ whose restriction to each U_α is in $\mathcal{G}$, then $g \in \mathcal{G}$.
>
> It is convenient also to permit $\mathcal{G}$ to be a pseudogroup acting on *any* manifold, although, as long as $\mathcal{G}$ is transitive, this doesn't give any new types of manifolds. See Haefliger, in Springer Lecture Notes ♯197, for a discussion.
>
> A group G acting on a manifold X determines a pseudogroup which consists of restrictions of elements of G to open sets in X. A (G, X)-manifold means a manifold glued together using this pseudogroup of restrictions of elements of G.

D Spectre d'un anneau

Shafarevich introduit la notion de spectre de la façon suivante, dans [Sha10, p. 5].

We consider a ring A, always assumed to be commutative with 1, but otherwise arbitrary. We attempt to associate with A a geometric object, which, in the case that A is the coordinate ring of an affine variety X, should take us back to X. This object will at first only be defined as a set, but we will subsequently give it a number of other structures, for example a topology, which should justify its claim to be geometric.

The very first definition requires some preliminary explanations. Consider varieties defined over an algebraically closed field. If we want to recover an affine variety X starting from its coordinate ring $k[X]$, it would be most natural to use the relation between subvarieties $Y \subset X$ and their ideals $\mathfrak{a}_Y \subset k[X]$. In particular a point $x \in X$ corresponds to a maximal ideal $\mathfrak{m}_x$, and it is easy to check that $x \mapsto \mathfrak{m}_x \subset k[X]$ establishes a one-to-one correspondence between points $x \in X$ and the maximal ideals of $k[X]$. Hence it would seem natural that the geometric object associated with any ring A should be its set of maximal ideals. This set is called the *maximal spectrum* of A and denoted by m-Spec$A$. However, in the degree of generality in which we are now considering the problem, the map $A \mapsto$ m-Spec$A$ has certain disadvantages, one of which we now discuss.

It is obviously natural to expect that the map sending A to its geometric set should have the main properties that relate the coordinate ring of an affine algebraic variety with the variety itself. Of these properties, the most important is that homomorphisms of rings correspond to regular maps of varieties. Is there a natural way of associating with a ring homomorphism $f\colon A \to B$ a map of m-Spec$B$ to m-Spec$A$? How in general does one send an ideal $\mathfrak{b} \subset B$ to some ideal $\mathfrak{b} \subset A$? There is obviously only one reasonable answer, to take the inverse image $f^{-1}(\mathfrak{b})$. But the trouble is that the inverse image of a maximal ideal is not always maximal. For example, if A is a ring with non zerodivisors that is not a field, and $f : A \hookrightarrow K$ an inclusion of A into a field, then the zero ideal (0) in K is the maximal ideal of K, but its inverse image is the zero ideal (0) in A, which is not maximal.

This trouble does not occur if instead of maximal ideals we consider prime ideals : it is elementary to check that the inverse image of a prime ideal under any ring homomorphism is again prime. In the case that $A = k[X]$ is the coordinate ring of an affine variety X, the set of prime ideals of A has a clear geometric meaning : it is the set of irreducible closed subvarieties of X (points, irreducible curves, irreducible surfaces, and so on). Finally, for a very large class of rings the set of prime ideals is determined by the set of maximal ideals (see Exercise 8). All of this motivates the following definition.

Definition The set of prime ideals of A is called its *prime spectrum* or simply *spectrum*, and denoted by $\operatorname{Spec} A$. Prime ideals are called *points* of $\operatorname{Spec} A$.

Bibliographie

[al94] M. Atiyah et AL. “Responses to “Theoretical Mathematics : Toward a Cultulral Synthesis of Mathematics and Theoreitical Physics”, by A. Jaffe and F. Quinn”. In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 30.2 (avr. 1994).

[Bre93] G.E. BREDON. *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, 1993.

[CC08] A. CONNES et J.-P. CHANGEUX. *Matière à penser*. Odile Jacob, 2008.

[DHM12] P.J. DAVIS, R. HERSH et E.A. MARCHISOTTO. *The Mathematical Experience*. Birkhäuser, 2012.

[Fom94] A. FOMENKO. *Visual Geometry and Topology*. Springer-Verlag, 1994.

[Gro60] A. GROTHENDIECK. “Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : I. Le langage des schémas”. In : *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.* 4 (1960), p. 5–228.

[GS99] R. E. GOMPF et A. I. STIPSICZ. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. American Mathematical Society, 1999.

[GX13] J. GALLIER et D. XU. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer-Verlag, 2013.

[Hac14] I. HACKING. *Why is there Philosophy of Mathematics at all ?* Cambridge University Press, 2014.

[JQ93] A. JAFFE et F. QUINN. ““Theoretical Mathematics” : Toward a Cultural Synthesis of Mathematics and Theoretical Physics”. In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 29.1 (juil. 1993).

[KL08] B. KLEINER et J. LOTT. “Notes on Perelman’s papers”. In : *Geometry and Topology* 12 (2008).

[Kou+05] J. KOUNEIHER et al., éds. *Géométrie au XXe siècle, 1930-2000 : histoire et horizons*. Hermann, 2005.

[Lan02] S. LANG. *Algebra*. Springer-Verlag, 2002.

[Lau38] A. LAUTMAN. *Les schémas de structure*. Hermann, 1938.

[Mil65] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Princeton University Press, 1965.

[Mil69] J.W. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1969.

[Mil82] J.W. Milnor. "Hyperbolic Geometry : The First 150 Years". In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 6.1 (jan. 1982).

[MS74] J.W. Milnor et J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Princeton University Press, 1974.

[Sai17] H.P. de Saint-Gervais. *Analysis Situs*. 2014-2017. url : http://analysis-situs.math.cnrs.fr.

[Sco05] A. Scorpan. *The Wild World of 4-Manifolds*. American Mathematical Society, 2005.

[Sha10] I.R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 2*. Springer-Verlag, 2010.

[Spi99] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Inc., 1999.

[Stö05] M. Stöltzner. "Theoretical Mathematics - On the Philosophical Significance of the Jaffe-Quinn Debate". In : *The Role of Mathematics in Physical Sciences - G. Boniolo et al. (eds.) - Springer* (2005), p. 197–222.

[Thu02] W.P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds - Based on the 1980 notes distributed by Princeton University*. MSRI, 2002.

[Thu82] W.P. Thurston. "Three Dimensional Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry". In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 6.3 (mai 1982).

[Thu94] W.P. Thurston. "On Proof And Progress In Mathematics". In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 30.2 (avr. 1994).

[Thu97] W.P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, 1997.

[Thu98] W.P. Thurston. "How to see 3-manifolds". In : *Class. Quantum Grav.* (1998).