

# Structures géométriques modelées sur le bord des espaces symétriques hermitiens

Introduction à un domaine de recherche

Raphaël V. ALEXANDRE

23 octobre 2019

## Résumé

L'une des façons de pratiquer la géométrie aujourd'hui consiste à comparer des objets topologiques à des objets géométriques. Plus précisément, à s'interroger sur l'interaction entre des variétés et des géométries. Cette introduction à un domaine de recherche vise à présenter un domaine qui s'inscrit dans cette trajectoire.

## SOMMAIRE

<b>1</b>	<b>La géométrie sous l'influence de THURSTON</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Deux structures sur la sphère</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Théorème de FRIED</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Ensembles limites auto-similaires</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Simulations d'ensembles limites</b>	<b>7</b>

## I — LA GÉOMÉTRIE SOUS L'INFLUENCE DE THURSTON

Les travaux de THURSTON en géométrie et topologie de dimension trois sont maintenant un classique de la géométrie contemporaine. Elle a permis la formulation de la fameuse conjecture de géométrisation, dont la preuve pour le cas général a été proposée par PERELMAN au début du millénaire. Cette preuve a eu pour conséquence la fin de la preuve de la conjecture de POINCARÉ, puisque seul le cas de la dimension trois restait à prouver (c'était d'ailleurs le véritable cas en question dans la conjecture originelle de POINCARÉ).

Un des apports conceptuels de THURSTON a été de proposer une façon de formuler ce que cela signifie de porter une structure géométrique. Cette question n'est évidemment pas récente, mais l'approche de THURSTON est originale et doit être distinguée de ce que, par exemple, CARTAN a proposé. Alors que l'approche de CARTAN, à travers notamment les connexions de CARTAN, consiste à déformer un espace géométrique, l'approche de THURSTON consiste plutôt à recoller sans déformation des morceaux de cet espace géométrique. D'autres différences subsistent. Par exemple il est difficile d'avoir une notion de géodésique dans une structure de THURSTON en général, alors qu'avec une connexion de CARTAN cela est, au moins en partie, facilité. Aussi, les connexions de CARTAN demandent un modèle géométrique donné par le quotient d'un groupe de LIE avec un sous-groupe fermé; les structures de THURSTON sont moins riches en axiomes et paraissent donc *a priori* plus élémentaires. Mais la construction de

nouvelles structures à partir d'anciennes est un problème plus difficile dans le cadre des structures de THURSTON. En effet, un phénomène tout à fait général de *mutation* dans le cas des connexions de CARTAN permet très naturellement de faire varier les structures géométriques, alors que dans le cas des structures de THURSTON il est assez difficile d'exhiber de nouveaux exemples. Les deux notions de structures, par THURSTON et par CARTAN, se rejoignent sur le terrain des structures plates : une structure plate au sens de CARTAN est une structure de THURSTON. Mais bien sûr, les structures plates pour les connexions de CARTAN sont des cas très particuliers, et manquent toute la généralité de la notion. De cette discussion, on peut justifier d'un certain nombre de questions souvent sans réponse qui apparaissent dès lors que l'on considère des structures de géométriques.

- (1) *Géométrisation et topologie.* Étant donné une structure géométrique, quelles sont les variétés que l'on peut former avec ?
- (2) *Comparaison.* Étant donnés deux structures géométriques, peut-on comparer la famille des variétés ayant la première structure et la famille de celles avec la seconde ?
- (3) *Preuves géométriques.* Les preuves de ces résultats peuvent-elles se formuler en ces mêmes termes ?

Ces questions très générales ayant été formulées, il devient maintenant nécessaire de définir ce que sont les structures géométriques au sens de THURSTON (1979)<sup>1, 2</sup>. L'idée très générale consiste à reprendre la définition d'un atlas et de prescrire plus précisément quelles sont les images des cartes et quelles sont les fonctions de transitions. Considérons  $X$  une variété lisse réelle analytique connexe, et  $G$  un groupe transitif de difféomorphismes analytiques de  $X$ <sup>3</sup>. On appelle le couple  $(G, X)$  une  $(G, X)$ -structure. Si  $M$  est un espace topologique. Alors on dit que  $M$  est une  $(G, X)$ -variété s'il existe un atlas de cartes  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  d'homéomorphismes sur leurs images de sorte que les applications de recollement :

$$\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

soient des restrictions d'éléments de  $G$ . Comme un élément de  $G$  est complètement déterminé par sa restriction sur un ouvert de  $X$  non vide, les  $\phi_{\alpha\beta}$  peuvent être considérées comme étant des éléments de  $G$ . Ainsi,  $M$  est automatiquement une variété lisse puisque les éléments de  $G$  sont des difféomorphismes (analytiques). Insistons sur le fait que les fonctions  $\phi_{\alpha\beta}$  sont constantes dans  $G$ , c'est là une différence fondamentale avec par exemple les cartes jauges de la géométrie de CARTAN<sup>4</sup>.

Les principaux outils pour étudier les  $(G, X)$ -structures sont donnés par le couple d'applications  $(\rho, D)$ , où  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$  est le *morphisme d'holonomie* (le *groupe d'holonomie* est alors l'image de  $\rho$ ) et où  $D : \tilde{M} \rightarrow X$  est la *développante*. Malheureusement, il y a peu de propriétés générales sur  $\rho$  et  $D$ . Les seules que l'on a vraiment à disposition sont que  $\rho$  est un morphisme de groupes, que  $D$  est un difféomorphisme local et que ces deux applications sont équivariantes, c'est-à-dire que  $D(g \cdot x) = \rho(g) \cdot D(x)$ .

1. [Thu79] William P. THURSTON. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*; "Thurston's Notes". 1979.

2. On parle ici des structures géométriques au sens de THURSTON car c'est ce dernier qui a véritablement exprimé les  $(G, X)$ -structures comme on continue à le faire aujourd'hui. Cependant ses idées ont des origines plus anciennes. Elles sont notamment présentes en bonne partie chez EHRESMANN dès 1935, bien que ce dernier considère des espaces  $X$  qui soient moins généraux.

3. En réalité, une notion plus générale de  $(G, X)$ -structure est possible en demandant que  $G$  ne soit qu'un pseudo-groupe, c'est-à-dire un ensemble où les compositions sont comme celles d'un groupe lorsque les domaines coïncident. En pratique, on prend des transformations qui sont définies sur des ouverts de  $X$  et non nécessairement tout  $X$ .

4. Une très bonne exposition de la théorie de Cartan a été faite dans le livre de SHARPE [Sha97].

La construction de  $(\rho, D)$  se fait en regardant  $\tilde{M}$  comme l'ensemble des chemins basés en  $x_0$  dans  $M$ . L'idée va être de prendre un chemin, et de regarder comment les cartes se recollent au fur et à mesure. Lors d'un lacet, le recollement des cartes n'a aucune raison de se faire trivialement lors du retour à la première carte : cela donne une holonomie. Aussi, l'image des cartes n'a pas de raison d'être simple : cela donne la développante. On fixe  $x_0, (U_0, \varphi_0)$  un point de  $M$  et une carte locale. On considère  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ , vu comme espace des chemins de  $M$  de base  $x_0$  modulo homotopie relative aux extrémités. Soit  $[\alpha] \in \tilde{M}$  représenté par un chemin  $\alpha$  dont les extrémités sont  $\alpha(0) = x_0$  et  $\alpha(1) = \pi([\alpha])$ . On peut subdiviser le chemin  $\alpha$  de sorte que  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  soit entièrement contenu dans un ouvert de carte  $U_i$ . On pose  $x_i = \alpha(t_i)$ . À présent, pour définir l'application développante, on va chercher à comprendre comment on doit ajuster les différentes cartes  $(\varphi_i, U_i)$  pour avoir un prolongement analytique de  $\varphi_0$  le long de  $\alpha$ . Le morphisme d'holonomie s'obtiendra par qualité d'équivariance. Sur l'intersection  $U_0 \cap U_1$  pour le point  $x_1$ , on doit ajuster  $\varphi_1$  en  $\varphi_{01}(x_1)\varphi_1(\cdot)$  afin que  $\varphi_0(\cdot)$  puisse être prolongé le long de  $\alpha$ . Ce faisant, de proche en proche, la dernière carte doit être ajustée en  $\varphi_{01}(x_1)\varphi_{12}(x_2)\cdots\varphi_{(n-1)n}(x_n)\varphi_n(\cdot)$ . Cette expression permet de donner l'image du chemin tout entier dans  $X$ . L'application qui donne cette image est la développante  $D$ , basée en  $x_0$ . Si l'on effectue un changement de point base, il y a translation à gauche de  $D$  et conjugaison de  $\rho$  par un élément du  $\pi_1(M)$ .

Deux propriétés fortes et non générales sont à rechercher dans une structure sur une variété.

- (1) *Complétude*. La développante  $D: \tilde{M} \rightarrow X$  est-elle un revêtement (ou un revêtement sur son image)?
- (2) *Discrétude*. Le groupe d'holonomie  $\rho(\pi_1(M))$  est-il discret dans  $G$ ?

Dans le cas où  $X$  est simplement connexe, la complétude signifie que  $D$  est un difféomorphisme et implique donc la discrétude. En particulier, la variété  $M$  est alors le quotient  $X/\rho(\pi_1(M))$ . Cette propriété de complétude est en général trop forte, on préférera par exemple examiner une question légèrement plus faible : la développante est-elle un revêtement sur son image? Les structures complètes, ou bien celles qui ont une développante qui ont un revêtement sur son image, permettent d'avoir des informations topologiques. On peut également se demander quelles sont les variétés qui sont *uniformisables*, c'est-à-dire (ce terme est changeant selon les auteurs) que la variété  $M$  est difféomorphe à un quotient  $U/\rho(\pi_1(M))$  avec  $U$  un domaine ouvert de  $X$  sur lequel le groupe d'holonomie agit proprement et totalement discontinument.

## II — DEUX STRUCTURES SUR LA SPHÈRE

On peut procéder à la construction de deux structures sphériques qui sont de grand intérêt : ce sont les structures conforme plate et CR sphérique<sup>5</sup>. La construction de ces deux structures se fait de façons très parallèles. On pourrait dire que l'une provient du bord de l'espace hyperbolique réel, et l'autre du bord de l'espace hyperbolique complexe. Ce sont donc deux exemples de structures qui sont le bord d'espaces symétriques.

Considérons les deux groupes  $\text{PO}(n, 1)$  et  $\text{PU}(n, 1)$ . Ce sont les groupes des isométries directes de l'espace hyperbolique réel et complexe respectivement : avec respectivement  $K_{\mathbf{R}} = \text{O}(n)$  ou  $K_{\mathbf{C}} = \text{U}(n)$ , on a respectivement  $\text{PO}(n, 1)/K_{\mathbf{R}} = \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  et  $\text{PU}(n, 1)/K_{\mathbf{C}} = \mathbf{H}_{\mathbf{C}}^n$ . Un travail d'algèbre linéaire relativement classique permet de montrer plus précisément que  $\text{PO}(n, 1) = K_{\mathbf{R}}P_{\mathbf{R}}$  et  $\text{PU}(n, 1) = K_{\mathbf{C}}P_{\mathbf{C}}$ , avec

5. L'acronyme CR désigne, selon les auteurs, tantôt CAUCHY-RIEMANN, tantôt Complexe-Réel. En un sens, les structures CR permettent de mettre une structure complexe sur une variété réelle de dimension impaire : cela se fait en les regardant comme hypersurfaces de variétés complexes.

à chaque fois  $P$  un groupe parabolique : il est obtenu comme stabilisateur d'un point de  $\partial\mathbf{H}^n$ . Topologiquement, on a toujours que  $\mathrm{PO}(n,1)/P_{\mathbf{R}}$  et  $\mathrm{PU}(n,1)/P_{\mathbf{C}}$  sont deux sphères : ce sont  $\partial\mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n$  et  $\partial\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^n$ , où le bord a été pris au sens géodésique (ce sont les limites des géodésiques, avec identification de deux géodésiques si elles restent à distance finie). Ainsi, dans le langage de THURSTON, la structure conformément plate consiste en  $(\mathrm{PO}(n,1), \mathbf{S}^{n-1})$  et la structure CR sphérique consiste en  $(\mathrm{PU}(n,1), \mathbf{S}^{2n-1})$ . Dans un langage plus proche de CARTAN, on parlerait plutôt des structures plates de  $\mathrm{PO}(n,1)/P_{\mathbf{R}}$  et de  $\mathrm{PU}(n,1)/P_{\mathbf{C}}$ .

Dans le cas réel, on dit que  $(\mathrm{PO}(n,1), \mathbf{S}^{n-1})$  est la structure conformément plate, car il s'avère que  $\mathrm{PO}(n,1)$  peut alors être identifié au groupe des transformations de MÖBIUS. Par exemple, lorsque  $n = 3$ , on peut identifier  $\mathrm{PO}(n,1)$  au groupe des transformations  $(az + b)/(cz + d)$  avec  $z \in \mathbf{CP}^1 \cong \mathbf{S}^2$  et  $a, b, c, d$  quatre paramètres complexes de sorte que l'application soit inversible. L'expression *conformément plate* est en réalité à comprendre au sens des géométries de CARTAN. Si l'on considère sur une variété  $M$  une métrique riemannienne  $g$ , alors l'ensemble des métriques conformes à  $g$  sont celles de la forme  $\lambda g$  avec  $\lambda$  un paramètre réel strictement positif. Le choix d'une telle métrique ne change pas les angles, d'où l'adjectif *conforme*. La structure  $(\mathrm{PO}(n,1), \mathbf{S}^{n-1})$  est conformément plate, car elle préserve la classe conforme de la métrique sphérique, qui est conforme à la métrique euclidienne (qui est plate).

Cette structure conformément plate contient en réalité trois sous-structures métriques : la structure sphérique, la structure euclidienne et la structure hyperbolique. Du fait qu'elle est plus riche que ces trois structures, on s'attend à ce qu'un grand nombre de variétés aient une structure conformément plate (structure complète ou non complète). Dans le cas complexe et de la structure CR sphérique  $(\mathrm{PU}(n,1), \partial\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^n)$  on peut montrer qu'il y a comme sous-structures la structure sphérique complexe  $(\mathrm{U}(n), \mathbf{S}^{2n-1})$  et la structure nilpotente de HEISENBERG, dite de similarité (explicitée dans le prochain paragraphe). On sait que certaines variétés hyperboliques admettent une structure CR sphérique uniformisable, par exemple le complémentaire du nœud de huit (FALBEL ; DERAUX et FALBEL (2008 ; 2015)<sup>6</sup>). On sait également que certaines variétés hyperboliques n'ont pas de structure CR sphérique uniformisable. En revanche, il n'est pas connu de critère permettant de déterminer la présence d'une structure CR sphérique complète ou non, y compris dans la classe des variétés ayant une structure conformément plate complète.

### III — THÉORÈME DE FRIED

Comme déjà constaté, de ces deux structures on peut en réalité faire découler un plus grand nombre de structures géométriques en considérant une paire  $(G', X') \subset (G, X)$  de sorte que  $G'$  agisse bien sur  $X'$  de façon transitive. Un exemple important consiste en le cas de la structure de *similarité*. Elle s'obtient en prenant  $G'$  le stabilisateur d'un point et  $X'$  l'espace privé de ce point. On utilise alors la notation  $(\mathrm{Sim}(\mathcal{N}), \mathcal{N})$  pour désigner cette structure. Bien sûr,  $\mathcal{N} = \partial\mathbf{H}^n - \{p\}$  et  $\mathrm{Sim}(\mathcal{N}) = P$ , avec  $P$  le groupe parabolique défini précédemment (qui était tantôt  $P_{\mathbf{R}}$ , tantôt  $P_{\mathbf{C}}$  selon le corps initial choisi).

Dans le cas de la structure conformément plate, la structure de similarité est bien celle portant ce nom. C'est-à-dire qu'elle est constituée du groupe des applications  $\lambda P(x) + c$  avec  $\lambda$  un réel strictement positif,  $P$  une transformation orthogonale et  $c$  un paramètre constant. C'est la structure  $(\mathrm{Sim}(\mathbf{R}^{n-1}), \mathbf{R}^{n-1})$ . Dans le cas complexe de la structure CR sphérique, on obtient le groupe de HEISENBERG comme groupe de transformations. On peut encore écrire ses transformations

6. [Fal08 ; DF15] Elisha FALBEL. "A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy". Dans : *Journal of Differential Geometry* 79.1 (2008) ; Martin DERAUX et Elisha FALBEL. "Complex hyperbolic geometry of the figure-eight knot". Dans : *Geometry & Topology* 19.1 (2015).

sous la forme  $\lambda P(x) + c$ . La principale différence avec le groupe du cas réel, consiste en le fait que la somme  $a + b$  dans le groupe de HEISENBERG n'est pas commutative, et peut en réalité s'écrire dans les coordonnées de l'algèbre de LIE comme étant  $a + b + \frac{1}{2}[a, b]$ . La structure nilpotente du groupe de HEISENBERG contient la sous-structure des translations, et cette géométrie nilpotente est l'une des huit géométries de THURSTON.<sup>7</sup> Elle est donc fondamentale, et il est heureux de pouvoir la comprendre dans un contexte plus large des structures géométriques des bords des espaces hyperboliques.

L'une des motivations à considérer les structures de similarité est qu'elles apparaissent très naturellement lorsque l'on cherche à comprendre les structures des *pointes* de variétés hyperboliques non compactes. En effet, une variété hyperbolique non compacte a une pointe si elle a un volume fini. Une telle pointe est topologiquement le produit entre un tore (une surface) et la droite positive (de sorte que l'on a bien topologiquement trois dimensions). La pointe tend vers l'infini, de sorte que pour essayer de comprendre la structure géométrique de la pointe, il convient de regarder l'holonomie qui fixe un point à l'infini (la limite de la pointe). Cela donne précisément une structure de similarité sur le tore de la pointe. Ainsi, il apparaît que même si le langage des  $(G, X)$ -structures ne permet pas de considérer des variétés à bords, elle permet en revanche d'étudier des bords géodésiques, à travers l'étude de la géométrie du bord de la géométrie initiale.

Un théorème fondamental est celui de FRIED (1980)<sup>8</sup>. Il permet de classifier quelles sont les variétés avec une structure de similarité (complète ou non). Le théorème initial de FRIED ne s'adresse qu'à la structure de similarité qui découle de la structure conforme plate, c'est-à-dire le cas du corps des nombres réels. En réalité, une version plus générale reste vraie en substituant l'espace hyperbolique réel avec les autres espaces hyperboliques : complexes, quaternioniques et le plan octonionique. Ce travail est l'objet de la pré-publication [Ale19].

**Théorème 3.1** (FRIED ; ALEXANDRE (1980 ; 2019)<sup>9</sup>) *Soit  $M$  une  $(\text{Sim}(\mathcal{N}), \mathcal{N})$ -variété fermée. Si sa structure n'est pas complète, alors l'holonomie de  $M$  fixe un point  $a \in \mathcal{N}$  et  $M$  est une  $(\text{Sim}(\mathcal{N})_{a, \mathcal{N} - \{a\}})$ -variété complète.*

Ce théorème se démontre par des techniques de dynamique. Après avoir exhibé de bonnes notions de géodésique et de convexité, la non-complétude de  $M$  implique la non-complétude d'une géodésique et permet alors une étude dynamique. L'argument étant relativement long, on conseillera plutôt la lecture de l'une des deux références précédentes.

Une conséquence classique du théorème de FRIED sur les variétés portant une structure de bord  $(G, \partial\mathbf{H}_{\mathbf{K}}^n)$  consiste en le résultat suivant. Les idées datent de KULKARNI et PINKALL (1986)<sup>10</sup> et sont encore présentes dans [Ale19].

**Théorème 3.2** *Soit  $M$  une  $(G, \partial\mathbf{H}_{\mathbf{K}}^n)$ -variété fermée. Si la développante de  $M$  n'est pas surjective, alors c'est un revêtement sur son image. Aussi, la développante*

7. Les huit géométries de THURSTON sont un élément culturel important. La conjecture de géométrisation de THURSTON stipule que toute variété de dimension trois fermée peut être décomposée en variétés qui a une structure complète parmi l'une des huit géométries, dites de THURSTON : euclidienne, hyperbolique, sphérique, nil(potente), solv, du revêtement universel de  $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ , du fibré  $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$  et du fibré  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$ .

8. [Fri80] David FRIED. "Closed similarity manifolds". Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 55.4 (1980).

9. [Fri80 ; Ale19] David FRIED. "Closed similarity manifolds". Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 55.4 (1980) ; Raphaël V. ALEXANDRE. "Fried's theorem for boundary geometries of rank one symmetric spaces". 2019.

10. [KP86] Ravi S. KULKARNI et Ulrich PINKALL. "Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry". Dans : *Differential geometry, Peñíscola 1985*. T. 1209. Springer, Berlin, 1986.

est un revêtement sur son image si, et seulement si,  $\partial D(\tilde{M}) = L(\Gamma)$ , avec  $L(\Gamma)$  l'ensemble limite du groupe d'holonomie  $\Gamma$ .

#### IV — ENSEMBLES LIMITES AUTO-SIMILAIRES

Le résultat précédent évoque l'ensemble limite d'un sous-groupe  $\Gamma \subset G$ . Il s'avère que c'est un objet crucial, depuis même l'étude des structures hyperboliques réelles. Considérons ainsi  $(G, \partial \mathbf{H}^n)$  qui peut être tantôt  $(\mathrm{PO}(n, 1), \partial \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$  tantôt  $(\mathrm{PU}(n, 1), \partial \mathbf{H}_{\mathbf{R}}^n)$ , ou même les correspondants dans les cas des quaternions et octonions. Si l'on prend une suite  $(g_n)$  d'applications de  $G$ , on peut les voir comme agissant sur  $\partial \mathbf{H}^n$ , mais aussi directement sur  $\mathbf{H}^n$ . On dit qu'un point  $p$  appartient à l'ensemble limite de  $\Gamma$  si, pour une suite d'éléments de  $\Gamma$ , l'orbite  $g_n o$  converge vers  $p \in \partial \mathbf{H}^n$  pour n'importe quel choix de  $o \in \mathbf{H}^n$ . Il apparaît que le choix de  $o$  n'est pas important : si l'on prend n'importe quelle géodésique dans  $\mathbf{H}^n$ , alors si l'action de  $g_n$  envoie une extrémité vers  $p$ , cela donne précisément que  $p$  est un point limite. La dynamique en jeu lorsque l'on étudie l'effet d'une telle suite  $g_n$  avec un point limite sur le bord  $\partial \mathbf{H}^n$  est une dynamique Nord-Sud.<sup>11</sup> En effet, considérons une géodésique à extrémités dans  $\partial \mathbf{H}^n$ . Alors l'action de  $g_n$  va envoyer au moins l'une des deux extrémités sur  $p$ . L'autre n'est pas nécessairement envoyée sur  $p$ , mais sur la limite de  $g_n^{-1} o$ , qui est le *point dual* à  $p$ . Ce sont les deux seuls points de  $\partial \mathbf{H}^n$  à être stables, tous les autres convergent vers  $p$  lorsque la suite  $g_n$  agit, et vers son dual lorsque  $g_n^{-1}$  agit. Des propriétés rigides agissent sur  $L(\Gamma)$ . Elles sont explicités en partie ici.

**Proposition 4.1** *L'ensemble des points limites  $L(\Gamma)$  d'un sous-groupe  $\Gamma$  vérifie les propriétés suivantes.*

- (1) *L'ensemble  $L(\Gamma)$  est le compact invariant minimal d'au moins deux points. C'est-à-dire que si  $B \subset \partial \mathbf{H}^n$  est compact et totalement invariant par  $\Gamma$  et contient au moins deux points, alors  $L(\Gamma) \subset B$ .*
- (2) *Si  $L(\Gamma)$  a au moins trois points, alors il est en fait infini et parfait : tout point est un point d'accumulation.*

Ces propriétés sont très semblables aux comportements des ensembles de JULIA. On pourra consulter par exemple MILNOR (2006)<sup>12</sup>. En effet, si l'on prend une fraction rationnelle agissant sur  $\mathbf{CP}^1 \cong \mathbf{S}^2$ , alors l'ensemble de JULIA de cette fraction rationnelle est un compact minimal invariant d'au moins trois points, infini, parfait. Cela semble donc correspondre au cas où  $L(\Gamma)$  a au moins trois points. Une propriété connue des ensembles de JULIA consiste en l'auto-similarité. Il s'avère que cette propriété est vraie pour  $L(\Gamma)$  si, et seulement si, une formulation non très éloignée du théorème de FRIED est vraie.

**Théorème 4.2** *Supposons que la proposition (P) suivante est vraie. (P): Si  $L(\Gamma)$  a un point totalement fixe, alors  $L(\Gamma)$  est fini. Alors si  $L(\Gamma)$  est infini, il est auto-similaire.*

**Preuve** Soit  $p \in L(\Gamma)$  et soit  $U \ni p$  un ouvert contenant  $p$ . Il s'agit de montrer qu'il existe un nombre fini de  $\gamma_n \in \Gamma$  tels que  $\bigcup \gamma_n U$  contient  $L(\Gamma)$ . L'action de  $\Gamma$  sur  $U$  donne en réunion  $\Gamma \cdot U$ . Bien sûr, le complémentaire est alors invariant par  $\Gamma$ . Puisque  $U$  est ouvert,  $\Gamma \cdot U$  est ouvert, et donc le complémentaire  $C$  est un compact de  $\partial \mathbf{H}^n$  totalement invariant. Par construction, il est impossible que  $L(\Gamma) \subset C$ . Donc  $C$  a au plus un point. Mais si ce point appartenait à  $L(\Gamma)$ , alors

<sup>11</sup>. Une dynamique de type Nord-Sud est une dynamique où un point est attractif et un autre et répulsif. Tous les autres points convergent vers celui qui est attractif.

<sup>12</sup>. [Mil06] John W. MILNOR. *Dynamics in one complex variable*. T. 160. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

$L(\Gamma)$  serait fini, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Donc tous les points de  $L(\Gamma)$  sont contenus dans  $\Gamma \cdot U$ . Mais  $L(\Gamma)$  est compact, donc il faut un nombre fini de  $\gamma_n$  dans  $\Gamma$  pour que  $L(\Gamma) \subset \bigcup \gamma_n U$ .  $\square$

**Proposition 4.3** *Supposons que  $M$  soit une  $(G, \partial\mathbf{H}^n)$ -variété fermée. Alors la propriété (P) est vraie pour  $\Gamma$  le groupe d'holonomie si, et seulement si, le théorème de FRIED est vrai.*

Les ingrédients pour prouver cette proposition sont essentiellement contenus dans FRIED, GOLDMAN et HIRSCH (1981)<sup>13</sup> à travers la proposition suivante : si l'holonomie fixe totalement un point, alors ce point est évité par la développante.

## V — SIMULATIONS D'ENSEMBLES LIMITES

Maintenant que nous avons comparé ensembles de JULIA et ensembles limites de groupes d'holonomies, il est assez naturel de chercher à faire des simulations. À quoi ressemblent des ensembles limites ?

Tout d'abord, il est évidemment important de comparer le cas des ensembles de JULIA avec le cas des structures conformément plates lorsque  $n = 3$  (puisque cela donne bien la sphère de dimension deux). Il s'avère qu'il y a un dictionnaire faisant correspondre les comportements des ensembles de JULIA à ceux des sous-groupes discrets de  $PO(3, 1)$  : c'est le dictionnaire de SULLIVAN (1985)<sup>14</sup>. En revanche, dans le cas de  $PU(2, 1)$ , il est assez mal connu quelles sont les formes possibles des ensembles limites de sous-groupes de  $PU(2, 1)$ .

Il est assez classique de montrer que si  $\Gamma \subset PU(2, 1)$  est un sous-groupe qui n'est pas discret, alors  $L(\Gamma)$  est le bord d'un sous-espace  $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{H}^n$ , et est donc essentiellement une sphère différentiable. Le cas intéressant est lorsque  $\Gamma$  est discret. Mais le problème général de savoir si  $\Gamma$  est discret est très difficile. C'est donc aussi une façon de tester le fait que  $\Gamma$  est discret que de procéder à une simulation : si  $L(\Gamma)$  n'est pas une sphère lisse, alors  $\Gamma$  est discret. Malheureusement la réciproque n'est pas vraie.

Pour procéder à la simulation de  $L(\Gamma)$  une méthode assez directe est possible. À partir de la description de  $\Gamma$  par un nombre fini de générateurs et de relations, on peut générer des mots (en essayant au mieux de ne pas avoir de répétitions, même si elles sont inévitables numériquement). Ensuite, on peut itérer sur un point de  $\mathbf{H}^n$  et tenter de trouver un point limite sur  $\partial\mathbf{H}^n$ . Les prochaines figures consistent en une simulation sur l'holonomie d'une structure sur le complémentaire du nœud de huit proposé par FALBEL dans [Fal08].

13. [FGH81] David FRIED, William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH. "Affine manifolds with nilpotent holonomy". Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 56.4 (1981).

14. [Sul85] Dennis SULLIVAN. "Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains". Dans : *Annals of Mathematics. Second Series* 122.3 (1985).

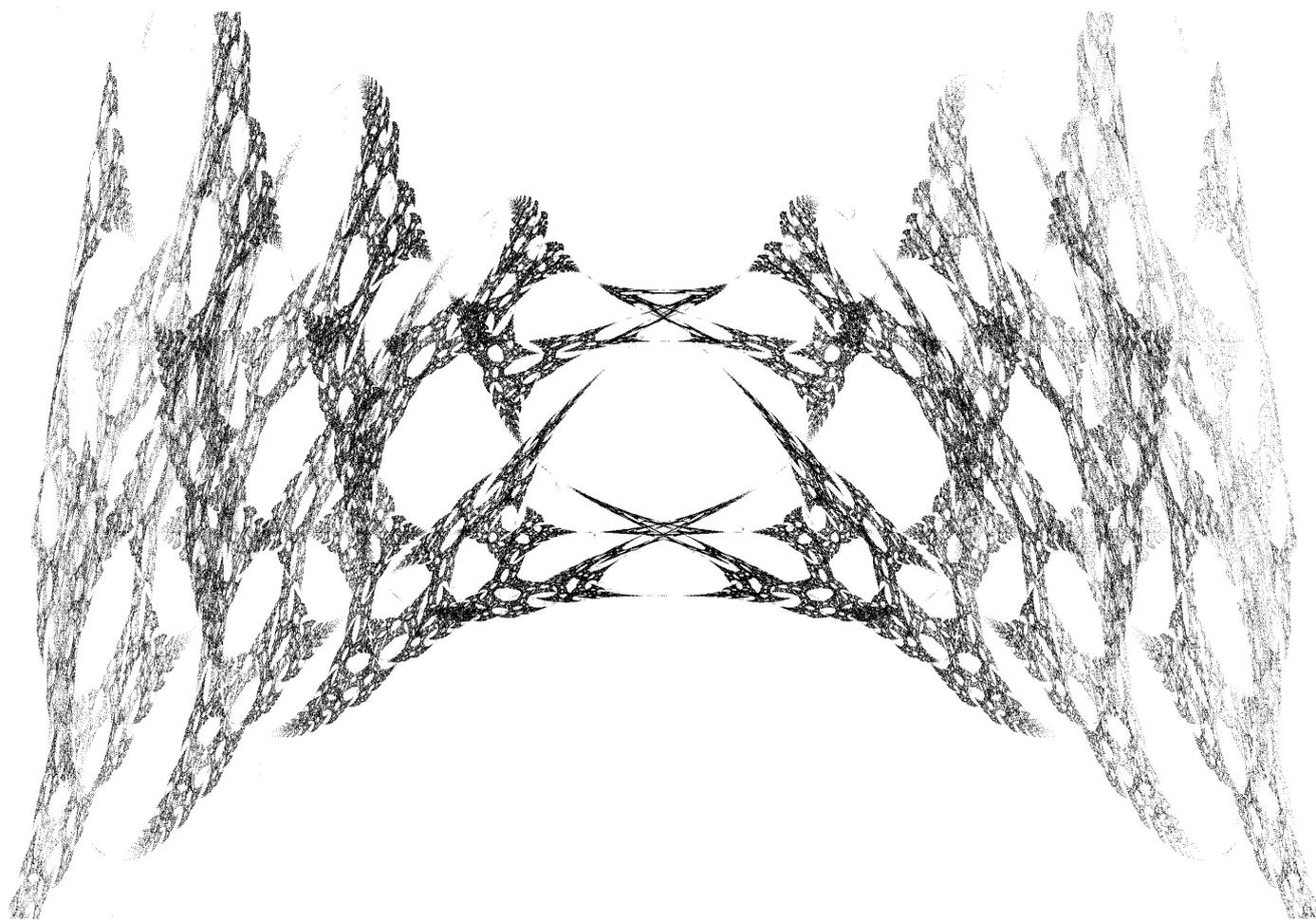
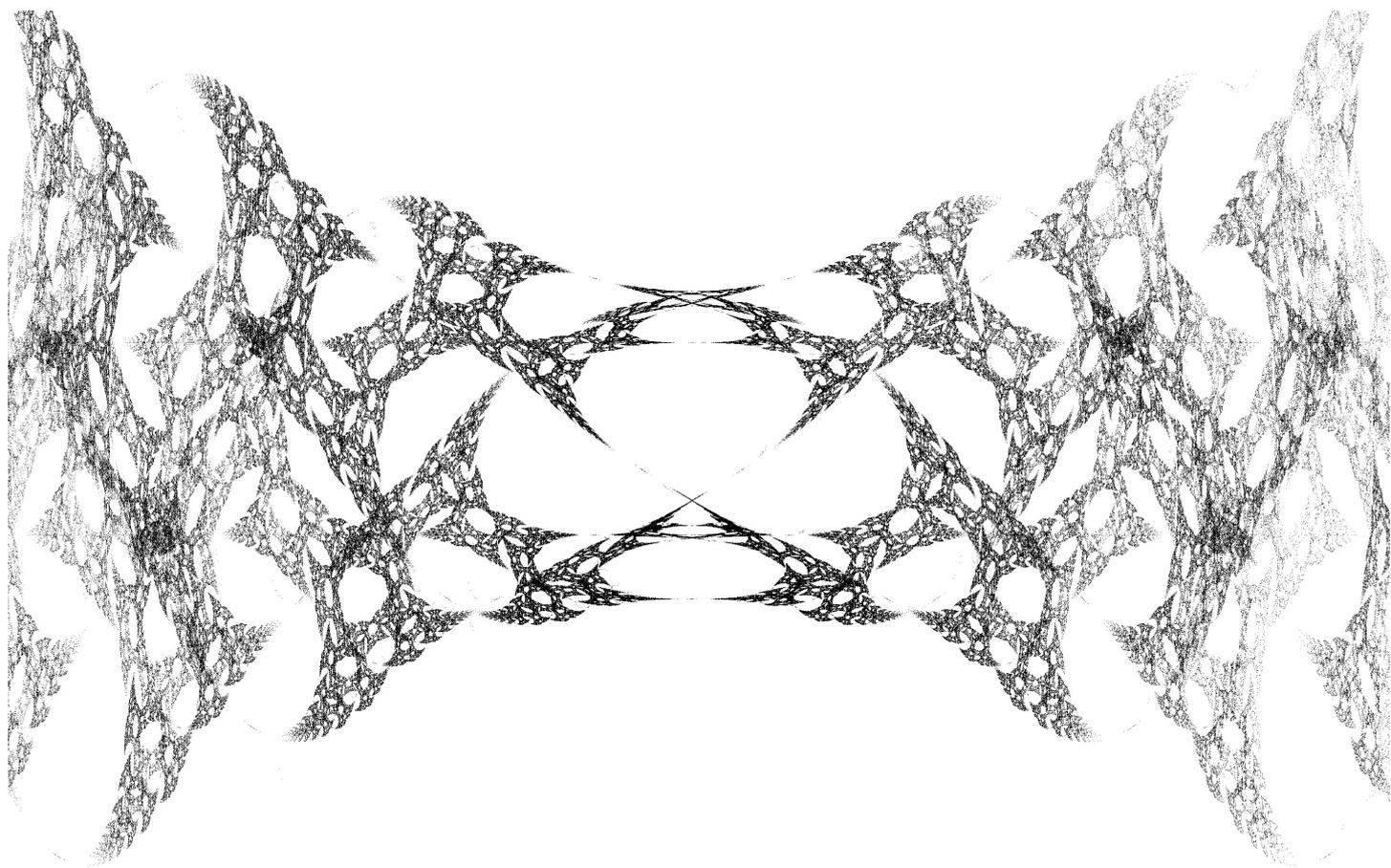


FIGURE 1 – Images de  $L(\Gamma)$ , premier plan.

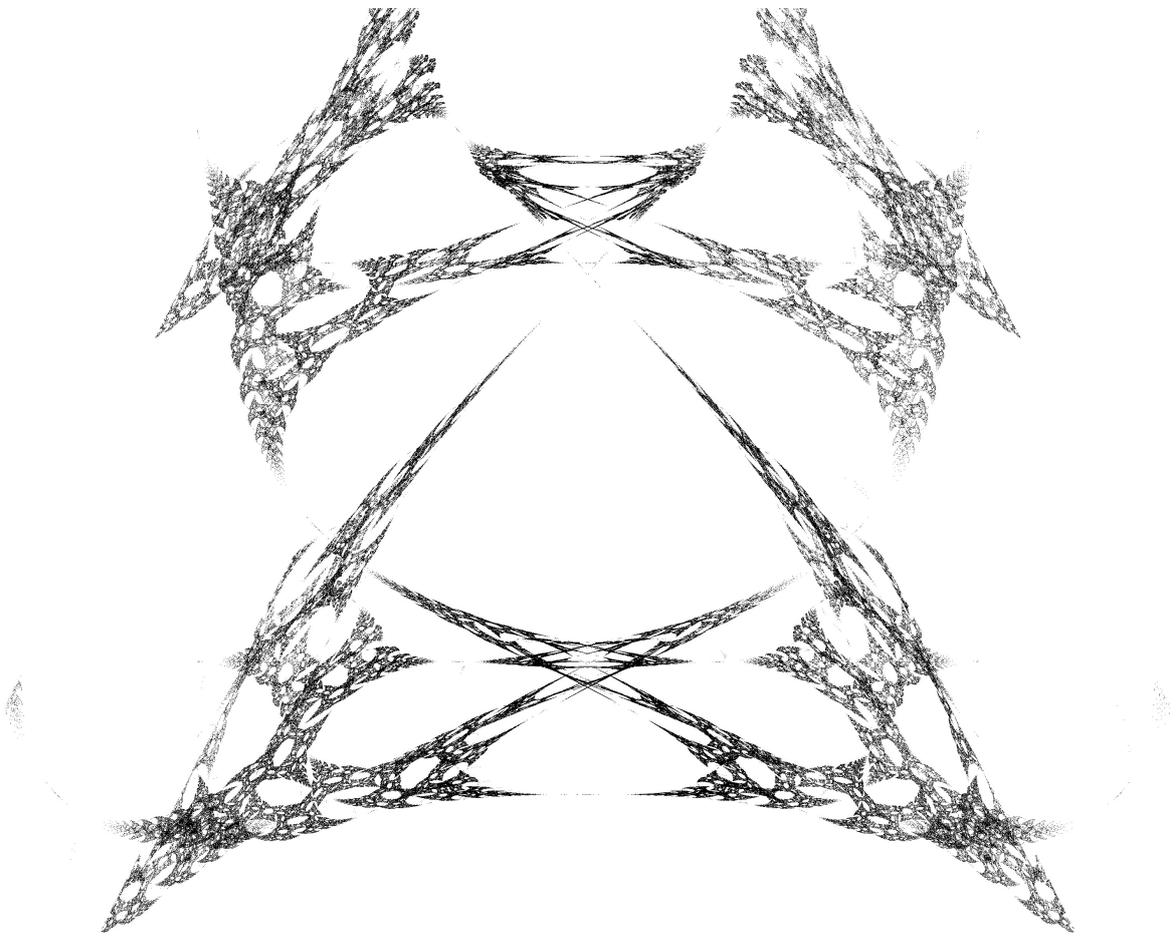
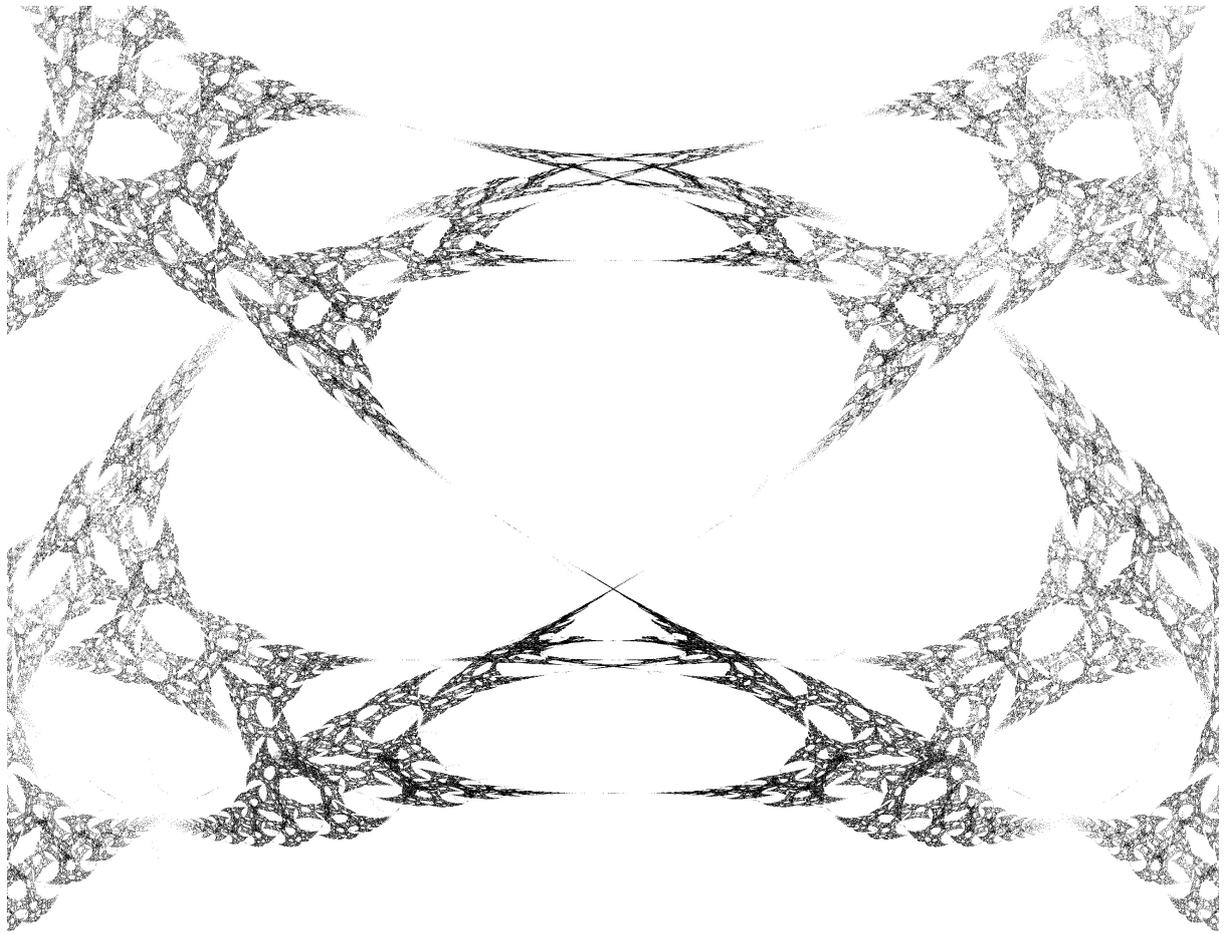


FIGURE 2 – Images de  $L(\Gamma)$ , deuxième plan.

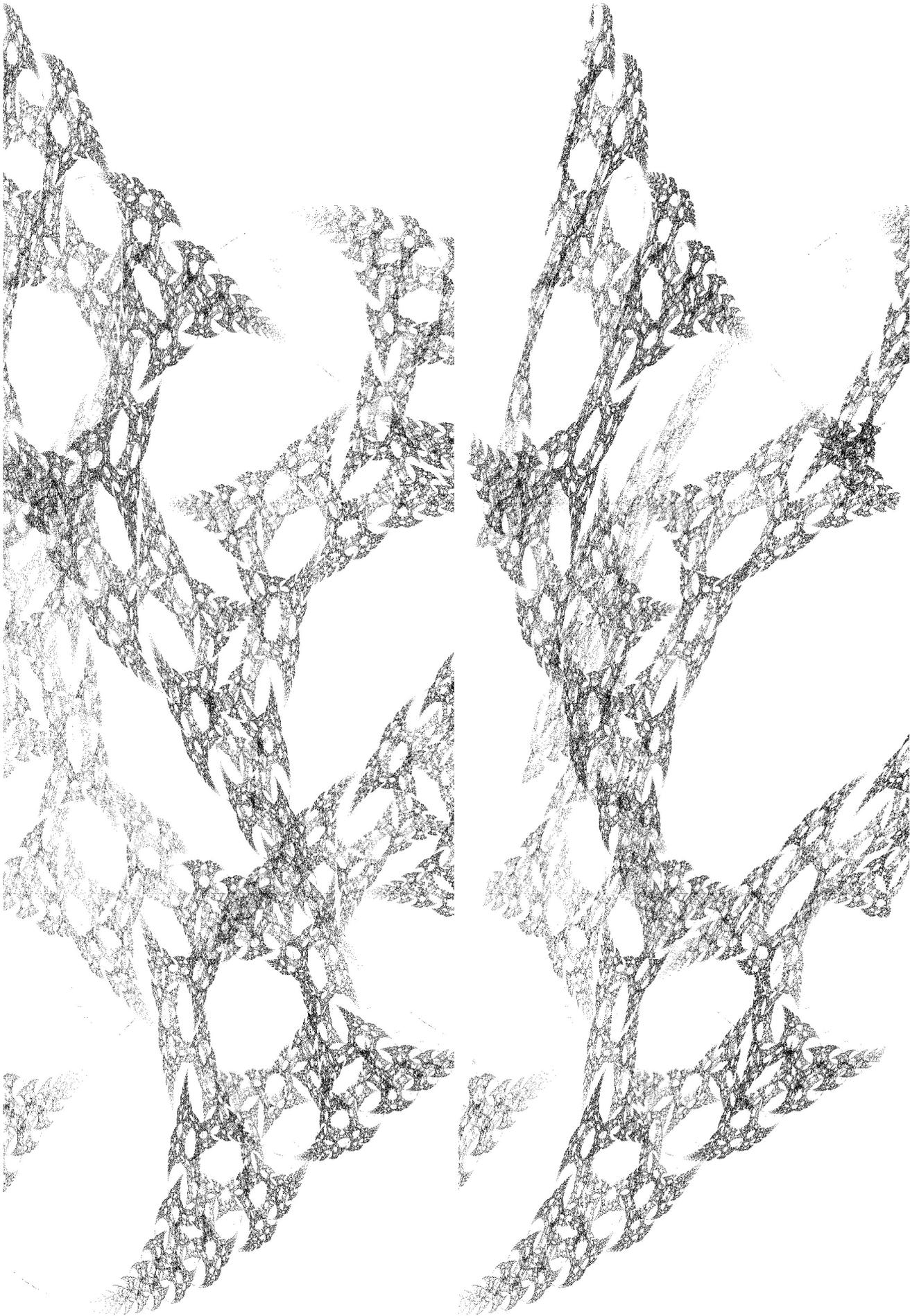


FIGURE 3 – Images de  $L(\Gamma)$ , troisième plan.

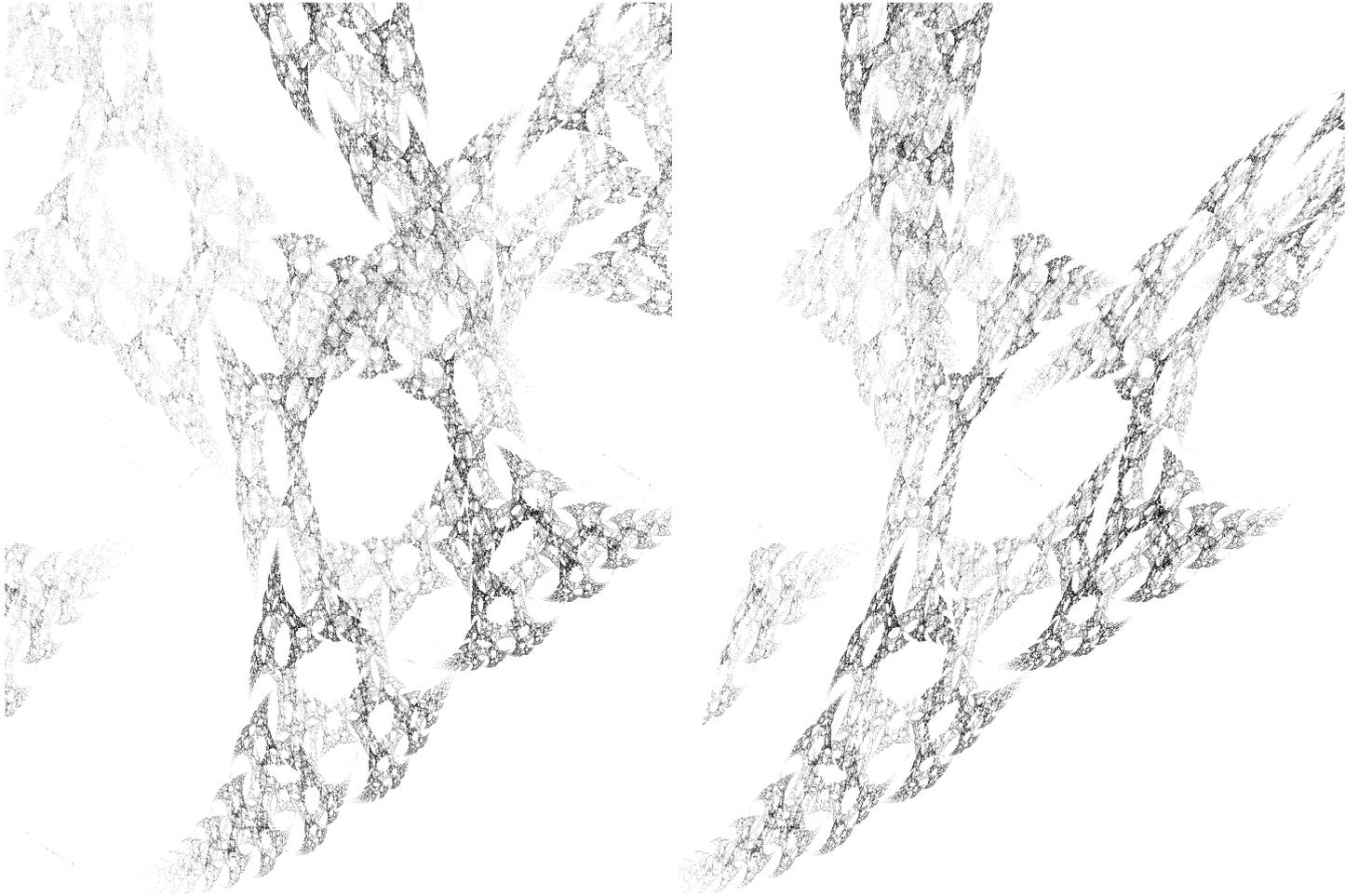


FIGURE 4 – Images de  $L(\Gamma)$ , quatrième plan.

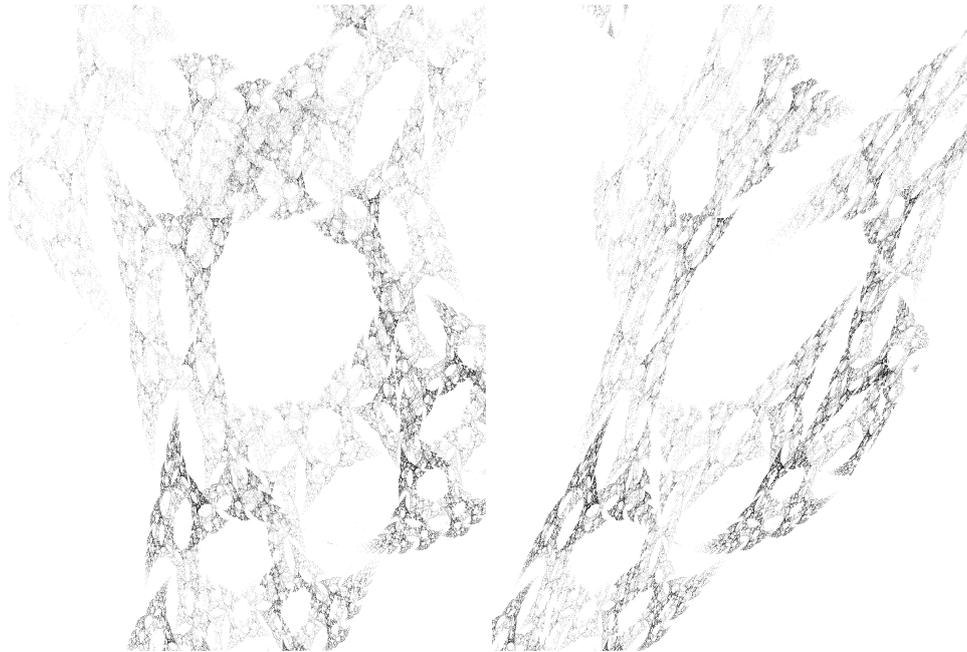


FIGURE 5 – Images de  $L(\Gamma)$ , cinquième plan.

## RÉFÉRENCES

- [Ale19] Raphaël V. ALEXANDRE. “Fried’s theorem for boundary geometries of rank one symmetric spaces”. preprint. 2019. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02293855> (cité p. 5).
- [DF15] Martin DERAUX et Elisha FALBEL. “Complex hyperbolic geometry of the figure-eight knot”. Dans : *Geometry & Topology* 19.1 (2015), p. 237-293 (cité p. 4).
- [Fal08] Elisha FALBEL. “A spherical CR structure on the complement of the figure eight knot with discrete holonomy”. Dans : *Journal of Differential Geometry* 79.1 (2008), p. 69-110 (cité p. 4, 7).
- [Fri80] David FRIED. “Closed similarity manifolds”. Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 55.4 (1980), p. 576-582 (cité p. 5).
- [FGH81] David FRIED, William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH. “Affine manifolds with nilpotent holonomy”. Dans : *Commentarii Mathematici Helvetici* 56.4 (1981), p. 487-523 (cité p. 7).
- [KP86] Ravi S. KULKARNI et Ulrich PINKALL. “Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry”. Dans : *Differential geometry, Peñíscola 1985*. T. 1209. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1986, p. 190-209 (cité p. 5).
- [Mil06] John W. MILNOR. *Dynamics in one complex variable*. Third. T. 160. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006 (cité p. 6).
- [Sha97] Richard W. SHARPE. *Differential geometry : Cartan’s generalization of Klein’s Erlangen program*. T. 166. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997 (cité p. 2).
- [Sul85] Dennis SULLIVAN. “Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains”. Dans : *Annals of Mathematics. Second Series* 122.3 (1985), p. 401-418 (cité p. 7).
- [Thu79] William P. THURSTON. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds ; “Thurston’s Notes”*. 1979 (cité p. 2).