

ENCYCLOPÉDIE
ou
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT de l'Académie Française, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, & de l'Institut de Bologne.

*Tantum series juncturaque pollet,
Tantum de medio sumptis accedit honoris!* HORAT.



Extraits édités présentés par
Raphaël V. ALEXANDRE,
À Paris, MM. XIX.

Page de couverture composée
à partir de celle du tome septième
de l'Encyclopédie.



MATHÉMATIQUE, ou MATHÉMATIQUES, s. f. (*ordre encyclop. entend., raison, philosophie ou science, science de la nature, Mathématiques.*) c'est la science qui a pour objet les propriétés de la grandeur tant qu'elle est calculable ou mesurable. Voyez GRANDEUR, CALCUL, MESURE, &c.

Mathématiques au pluriel est beaucoup plus usité aujourd'hui que *Mathématique* au singulier. On ne dit guère la *Mathématique*, mais les *Mathématiques*.

La plus commune opinion dérive le mot *Mathématique* d'un mot grec, qui signifie *science*; parce qu'en effet, on peut regarder, selon eux, les *Mathématiques*, comme étant la science par excellence, puisqu'elles renferment les seules connoissances certaines accordées à nos lumières naturelles; nous disons à nos *lumières naturelles*, pour ne point comprendre ici les vérités de foi, & les dogmes théologiques. Voyez FOI & THÉOLOGIE.

D'autres donnent au mot MATHÉMATIQUE une autre origine, sur laquelle nous n'insisterons pas, & qu'on peut voir dans l'*histoire des Mathématiques* de M. Montucla, pag. 2. & 3. Au fond, il importe peu quelle origine on donne à ce mot, pourvu que l'on se fasse une idée juste de ce que c'est que les *Mathématiques*. Or cette idée est comprise dans la définition que nous en avons donnée; & cette définition va être encore mieux éclaircie.

Les *Mathématiques* se divisent en deux classes; la première, qu'on appelle *Mathématiques pures*, considère les propriétés de la grandeur d'une manière abstraite: or la grandeur sous ce point de vue, est ou calculable, ou mesurable: dans le premier cas, elle est représentée par des nombres; dans le second, par l'étendue: dans le premier cas les *Mathématiques pures* s'appellent *Arithmétiques*; dans le second, *Géométrie*. Voyez les mots ARITHMÉTIQUE & GEOMÉTRIE.

La seconde classe s'appelle *Mathématiques mixtes*; elle a pour objet les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable; nous disons de la grandeur concrète, c'est-à-dire, de la grandeur envisagée dans certains corps ou sujets particuliers. Voyez CONCRET.

Du nombre des *Mathématiques mixtes*, sont la Mécanique, l'Optique, l'Astronomie, la Géographie, la Chronologie, l'Architecture militaire, l'Hydrostatique, l'Hydraulique, l'Hydrographie ou Navigation, &c. Voyez ces mots. Voyez aussi le système figuré des connoissances humaines, qui est à la tête de cet ouvrage, & l'explication de ce système, immédiatement à la suite du discours préliminaire; toutes les divisions des *Mathématiques* y sont détaillées, ce qui nous dispense de les rappeler ici.

Nous avons plusieurs cours de *Mathématiques*; le plus estimé est celui de M. Wolf, en 5. vol. in-4°. mais il n'est pas exempt de fautes. Voyez COURS & ÉLÉMENTS DES SCIENCES. A l'égard de l'histoire de cette science, nous avons à présent tout ce que nous pouvons désirer sur ce sujet, depuis l'ouvrage que M. de Montucla a publié en deux volumes in-4°. sous le titre d'*histoire des Mathématiques*, & qui comprend jusqu'à la fin du xvii^e siècle.

Quant à l'utilité des *Mathématiques*, voyez les différens articles déjà cités; & sur-tout les articles GEOMÉTRIE & GEOMETRE. (A)

Nous dirons seulement ici, que si plusieurs écrivains ont voulu contester aux *Mathématiques* leur utilité réelle, si bien prouvée par la préface de l'histoire de l'académie des Sciences, il y en a eu d'autres qui ont cherché dans ces sciences des objets d'utilités frivoles ou ridicules. On peut en voir un léger détail dans l'*histoire*

des *Mathématiques* de M. Montucla, tome I. p. 37. & 38. Cela me rappelle le trait d'un chirurgien, qui, voulant prouver la nécessité que les Chirurgiens ont d'être lettrés, prétend qu'un chirurgien qui n'a pas fait sa rhétorique, n'est pas en état de persuader à un malade de se faire saigner lorsqu'il en a besoin.

Nous ne nous étendrons pas ici davantage sur ces différens sujets, non plus que sur les différentes branches des *Mathématiques*, pour ne point répéter ce que nous avons déjà dit, ou ce que nous dirons ailleurs. Voyez aussi l'article PHYSICO-MATHÉMATIQUES.

Différentes branches des *Mathématiques* se divisent encore en spéculatives & pratiques. Voyez ASTRONOMIE, GEOMÉTRIE, &c. (O)



GÉOMETRE, s. m. (*Mathématiq.*) se dit proprement d'une personne versée dans la Géométrie; mais on applique en général ce nom à tout mathématicien, parce que la Géométrie étant une partie essentielle des *Mathématiques*, & qui a sur presque toutes les autres une influence nécessaire, il est difficile d'être versé profondément dans quelque partie des *Mathématiques* que ce soit, sans l'être en même tems dans la Géométrie. Ainsi on dit de Newton qu'il étoit grand *géometre*, pour dire qu'il étoit grand mathématicien.

Un *géometre*, quand il ne voudroit que se borner à entendre ce qui a été trouvé par d'autres, doit avoir plusieurs qualités assez rares; la justesse de l'esprit pour saisir les raisonnemens & démêler les paralogismes, la facilité de la conception pour entendre avec promptitude, l'étendue pour embrasser à-la-fois les différentes parties d'une démonstration compliquée, la mémoire pour retenir les propositions principales, leurs démonstrations mêmes, ou du-moins l'esprit de ces démonstrations, & pour pouvoir en cas de besoin se rappeler les unes & les autres, & en faire usage. Mais le *géometre* qui ne se contentera pas de savoir ce qui a été fait avant lui, & qui veut ajouter aux découvertes de ses prédécesseurs, doit joindre à ces différentes parties de l'esprit d'autres qualités encore moins communes, la profondeur, l'invention, la force, & la sagacité.

Je ne suis pas éloigné de penser avec quelques écrivains modernes, que l'on peut apprendre la Géométrie aux enfans, & qu'ils sont capables de s'appliquer à cette science, pourvu qu'on se borne aux seuls élémens, qui étant peu compliqués, ne demandent qu'une conception ordinaire; mais ces qualités médiocres ne suffisent pas dans l'étude des *Mathématiques transcendantes*: pour être un *savant géometre*, & même pour n'être que cela, il faut un degré d'esprit beaucoup moins commun; & pour être un *grand géometre* (car le nom de *grand* ne doit être donné qu'aux inventeurs), il faut plus que de l'esprit, il faut du génie, le génie n'étant autre chose que le talent d'inventer. Il est vrai que l'esprit dont nous parlons est différent de celui qu'il faut pour une épigramme, pour un poème, pour une pièce d'éloquence, pour écrire l'histoire; mais n'y a-t-il donc d'esprit que de cette dernière espèce? Voyez ESPRIT. Et un écrivain médiocre, ou même un bon écrivain, croira-t-il avoir plus d'esprit que Newton & que Descartes?

Peut-être nous sera-t-il permis de rapporter à cette occasion une réponse de feu M. de la Motte. Un *géometre* de ses amis, apparemment ignorant ou de mauvaise foi, parloit avec mépris du grand Newton, qu'il auroit mieux fait d'étudier; *Newton*, disoit ce *géometre*, n'étoit qu'un bœuf; cela se peut, répondit la Motte, mais c'étoit le premier bœuf de son siècle.

On pourroit demander s'il a fallu plus d'esprit pour faire Cinna, Heraclius, Rodogune, Horace, & Polieucte, que pour trouver les lois de la gravitation. Cette question n'est pas susceptible d'être résolue, ces deux genres d'esprit étant trop différens pour être comparés; mais on peut demander s'il n'y a pas autant de mérite à l'un qu'à l'autre; & qui auroit à choisir d'être Newton ou Corneille, feroit bien d'être embarrassé, ou ne mériteroit pas d'avoir à choisir. Au reste cette question est décidée tous les jours par quelques littérateurs obscurs, quelques satyriques subalternes, qui méprisent ce qu'ils ignorent, & qui ignorent ce qu'ils croient favoir; incapables, je ne dis pas d'apprécier Corneille, & de lire Newton, mais de juger Campiftron & d'entendre Euclide.

Si l'esprit nécessaire au *géometre* n'est pas le même que celui dont on a besoin pour réussir dans la Littérature, ils ne s'excluent pas l'un l'autre. Néanmoins quand on veut louer parmi nous un mathématicien, on dit de lui qu'il est grand *géometre*, & *cependant* homme d'esprit & de goût; on croit lui faire beaucoup d'honneur, & on se fait quelque gré du bon mot qu'on s'imagine avoir dit. Ces façons de parler si connues, *lourd comme un géometre*, *ignorant comme un poète*, ou *comme un prédicateur*, sont devenues des especes de proverbes, & presque des phrases de la langue, aussi équitables l'une que l'autre; les exemples qui en prouvent l'injustice ne sont pas rares; & pour ne parler ici que des Mathématiciens, Pascal à qui la Géométrie doit un si bel ouvrage sur la Cycloïde, & qui auroit peut-être été le plus grand *géometre* de l'univers, si une dévotion assez mal entendue ne lui eût fait abandonner son talent, Pascal étoit en même tems un très-bel esprit. Ses Provinciales sont un chef-d'œuvre de plaisanterie & d'éloquence, c'est-à-dire un modele dans les deux genres d'écrire qui paroissent les plus opposés. On dira peut-être que Pascal n'est qu'une exception; il est malheureux que l'exception démente si formellement la regle qu'on voudroit établir; mais croit-on que cette exception soit la seule? Nous ne citerons point M. de Fontenelle, qu'on voudra peut-être ne regarder que comme un bel esprit devenu *géometre* par accident: mais nous renverrons les détracteurs de la Géométrie aux ouvrages philosophiques de Descartes, si bien écrits pour leur tems; à ceux de Malebranche, qui sont des chefs-d'œuvre de style; aux poésies de Manfredi, que M. de Fontenelle a si justement célébrées; aux vers que M. Halley a mis à la tête des principes de Newton, & à tant d'autres que nous pourrions nommer encore. Si ces *géometres* n'étoient pas des hommes d'esprit, qu'on nous dise en quoi l'esprit consiste, & à quoi il se borne.

On connoît la ridicule question du P. Bouhours, *si un allemand peut avoir de l'esprit?* Les Allemands y ont répondu comme ils le devoient, par cette question non moins ridicule, *si un françois peut avoir le sens commun?* Ceux qui font aux *Géometres* le même honneur que le P. Bouhours a fait aux Allemands, mériteroient qu'on leur demandât aussi, *si on peut ignorer la Géométrie, & raisonner juste?* Mais sans répondre aux injures par d'autres, opposons-y des faits. Balzac étoit sans doute un bel esprit, dans le sens où l'on prend ordinairement ce mot; qu'on lise les lettres de Descartes à Balzac, & celles de Balzac à Descartes, & qu'on décide ensuite, si on est de bonne foi, lequel des deux est l'homme d'esprit.

Descartes, dit-on, fit en Suede d'assez mauvais vers pour un divertissement donné à la reine Christine; mais c'étoit en 1649;

& à l'exception de Corneille, qui même ne réussissoit pas toujours, quelqu'un faisoit-il alors de bons vers en Europe? Les premiers opéras de l'abbé Perrin ne valoient peut-être pas mieux que le divertissement de Descartes. Pascal, ajoute-t-on, a très-mal raisonné sur la Poésie; cela est vrai, mais que s'ensuit-il de-là? C'est que Pascal ne se connoissoit pas en vers, faute peut-être d'en avoir assez lû, & d'avoir réfléchi sur ce genre; la Poésie est un art d'institution qui demande quelque exercice & quelque habitude pour en bien juger; or Pascal n'avoit lû que des livres de Géométrie & de piété, & peut-être de mauvais vers de dévotion qui l'avoient prévenu contre la Poésie en général; mais ses provinciales prouvent qu'il avoit d'ailleurs le tact très-fin & le goût très-juste. On n'y trouve pas un terme ignoble, un mot qui ait vieilli, une plaisanterie froide.

La Géométrie, dit-on encore, donne à l'esprit de la sècheresse; oui, quand on y est déjà préparé par la nature: en ce cas, on ne feroit guere plus sensible aux beautés des ouvrages d'imagination, quand même on n'auroit fait aucune étude de la Géométrie; mais celui à qui la nature aura donné avec le talent des Mathématiques un esprit flexible à d'autres objets, & qui aura soin d'entretenir dans son esprit cette heureuse flexibilité, en le pliant en tout sens, en ne le tenant point toujours courbé vers les lignes & les calculs, & en l'exerçant à des matieres de littérature, de goût, & de philosophie, celui-là conservera tout-à-la-fois la sensibilité pour les choses d'agrément, & la rigueur nécessaire aux démonstrations; il saura résoudre un problème, & lire un poète; calculer les mouvemens des planetes, & avoir du plaisir à une piece de théâtre.

L'étude & le talent de la Géométrie ne nuisent donc point par eux mêmes aux talens & aux occupations littéraires. On peut même dire en un sens, qu'ils sont utiles pour quelque genre d'écrire que ce puisse être; un ouvrage de morale, de littérature, de critique, en fera meilleur, *toutes choses d'ailleurs égales*, s'il est fait par un *géometre*, comme M. de Fontenelle l'a très-bien observé; on y remarquera cette justesse & cette liaison d'idées à laquelle l'étude de la Géométrie nous accoutume, & qu'elle nous fait ensuite porter dans nos écrits sans nous en appercevoir & comme malgré nous.

L'étude de la Géométrie ne peut sans doute rendre l'esprit juste à celui qui ne l'a pas; mais aussi un esprit sans justesse n'est pas fait pour cette étude, il n'y réussira point; c'est pourquoi si on a eu raison de dire que *la Géométrie ne redresse que les esprits droits*, on auroit bien fait d'ajouter que *les esprits droits sont les seuls propres à la Géométrie*.

On ne peut donc avoir l'esprit *géometre*, c'est-à-dire le talent de la Géométrie, sans avoir en même tems l'esprit *géométrique*, c'est-à-dire l'esprit de méthode & de justesse. Car l'esprit *géometre* n'est proprement que l'esprit *géométrique*, appliqué à la seule Géométrie, & il est bien difficile quand on fait faire usage de cet esprit dans les matieres géométriques, qu'on ne puisse de même le tourner avec un succès égal vers d'autres objets. Il est vrai que l'esprit géométrique pour se développer avec toute sa force & son activité, demande quelque exercice; & c'est pour cela qu'un homme concentré dans l'étude de la Géométrie, paroitra n'avoir que l'esprit *géometre*, parce qu'il n'aura pas appliqué à d'autres matieres le talent que la nature lui a donné de raisonner juste. De plus si les *Géometres* se trompent lorsqu'ils appliquent leur logique à d'autres sciences que la Géométrie, leur erreur est plutôt dans les principes qu'ils adoptent, que dans les conséquences qu'ils en tirent. Cette erreur dans les principes peut venir ou de ce que le

géometre n'a pas les connoissances préliminaires suffisantes pour le conduire aux principes véritables, ou de ce que les principes de la science dont il traite ne sortent point de la sphaere des probabilités. Alors il peut arriver qu'un esprit accoutumé aux démonstrations rigoureuses, n'ait pas à un degré suffisant le tact nécessaire pour distinguer ce qui est plus probable d'avec ce qui l'est moins. Cependant j'ose penser encore qu'un *géometre* exercé à l'evidence mathématique, distinguera plus aisément dans les autres sciences ce qui est vraiment évident d'avec ce qui n'est que vraisemblable & conjectural; & que de plus ce même *géometre* avec quelque exercice & quelque habitude, distinguera aussi plus aisément ce qui est plus probable d'avec ce qui l'est moins; car la Géométrie a aussi son calcul des probabilités.

A l'occasion de ce calcul, je crois devoir faire une réflexion qui contredira un peu l'opinion commune sur l'esprit du jeu. On imagine pour l'ordinaire qu'un *géometre*, un savant exercé aux calculs, doit avoir l'esprit du jeu dans un degré supérieur; il me semble que ces deux esprits sont fort différens, si même ils ne sont pas contraires. L'esprit *géometre* est sans doute un esprit de calcul & de combinaison, mais de combinaison scrupuleuse & lente, qui examine l'une après l'autre toutes les parties de l'objet, & qui les compare successivement entr'elles, prenant garde de n'en omettre aucune, & de les rapprocher par toutes leurs faces; en un mot ne faisant à-la-fois qu'un pas, & ayant soin de le bien assurer avant que de passer au suivant. L'esprit du jeu est un esprit de combinaison rapide, qui embrasse d'un coup-d'œil & comme d'une maniere vague un grand nombre de cas, dont quelques-uns peuvent lui échapper, parce qu'il est moins assujetti à des regles, qu'il n'est une espece d'instinct perfectionné par l'habitude. D'ailleurs le *géometre* peut se donner tout le tems nécessaire pour résoudre ses problèmes; il fait un effort, se repose, & repart de-là avec de nouvelles forces. Le joueur est obligé de résoudre ses problèmes sur le champ, & de faire dans un tems donné & très-court tout l'usage possible de son esprit. Il n'est donc pas surprenant qu'un grand *géometre* soit un joueur très-médiocre; & rien n'est en effet plus commun.

La Géométrie a parmi nous des censeurs de tous les genres. Il en est qui lui contestent jusqu'à son utilité; nous les renvoyons à la *préface* si connue de l'histoire de l'académie des Sciences, où les mathématiques sont suffisamment vengées de ce reproche. Mais indépendamment des usages physiques & palpables de la Géométrie, nous envisagerons ici ses avantages sous une autre face, à laquelle on n'a peut-être pas fait encore assez d'attention: c'est l'utilité dont cette étude peut être pour préparer comme insensiblement les voies à l'esprit philosophique, & pour disposer toute une nation à recevoir la lumiere que cet esprit peut y répandre. C'est peut-être le seul moyen de faire secoüer peu-à-peu à certaines contrées de l'Europe, le joug de l'oppression & de l'ignorance profonde sous laquelle elles gémissent. Le petit nombre d'hommes éclairés qui habitent certains pays d'inquisition, se plaint amèrement quoiqu'en secret, du peu de progrès que les Sciences ont fait jusqu'ici dans ces tristes climats. Les précautions qu'on a prises pour empêcher la lumiere d'y pénétrer, ont si bien réussi, que la Philosophie y est à-peu-près dans le même état où elle étoit parmi nous du tems de Louis le Jeune. Il est certain que les abus les plus intolérables d'un tribunal qui nous a toujours si justement révoltés, ne se sont produits & ne s'entretiennent que par l'ignorance & la

superstition. Eclairer la nation, & les ministres de ces tribunaux renonceroient d'eux-mêmes à des excès dont ils auront les premiers reconnu l'injustice & les inconvéniens. C'est ce que nous avons vu arriver dans les pays où le goût des Arts & des Sciences & les lumieres de la Philosophie se sont conservés. On étudie & on raisonne en Italie; & l'inquisition y a beaucoup rabattu de la tyrannie qu'elle exerce dans ces régions, où l'on fait encore prêter serment de ne point enseigner d'autre philosophie que celle d'Aristote. Faites naître, s'il est possible, des *géometres* parmi ces peuples; c'est une semence qui produira des philosophes avec le tems, & presque sans qu'on s'en aperçoive. L'orthodoxie la plus délicate & la plus scrupuleuse n'a rien à démêler avec la Géométrie. Ceux qui croiroient avoir intérêt de tenir les esprits dans les ténèbres, fussent-ils assez prévoyans pour pressentir la suite des progrès de cette science, manqueroient toujours de prétexte pour l'empêcher de se répandre. Bien-tôt l'étude de la Géométrie conduira à celle de la mécanique; celle-ci menera comme d'elle-même & sans obstacle, à l'étude de la saine Physique; & enfin la saine Physique à la vraie Philosophie, qui par la lumiere générale & prompte qu'elle répandra, sera bien-tôt plus puissante que tous les efforts de la superstition; car ces efforts, quelque grands qu'ils soient, deviennent inutiles dès qu'une fois la nation est éclairée.

Croira-t-on que nous parlons sérieusement, si nous employons les dernières lignes de cet article à justifier les *Géometres* du reproche qu'on leur fait d'ordinaire, de n'être pas fort portés à la soumission en matiere de foi? Nous aurions honte de répondre à cette imputation, si elle n'étoit malheureusement aussi commune qu'elle est injuste. Bayle qui doutoit & se moquoit de tout, n'a pas peu contribué à la répandre par les réflexions malignes qu'il a hasardées dans l'article Pascal, contre l'orthodoxie des Mathématiciens, & par ses lamentations sur le malheur que les *Géometres* ont eu jusqu'ici de ne voir aucun de leurs noms dans le calendrier; lamentations trop peu sérieuses pour être rapportées dans un ouvrage aussi grave que celui-ci. Sans répondre à cette mauvaise plaisanterie par quelqu'autre, il est facile de se convaincre par la lecture des éloges académiques de M. de Fontenelle, par les vies de Descartes, de Pascal, & de plusieurs mathématiciens célèbres, qu'on peut être *géometre* sans être pour ses freres un sujet de scandale. La Géométrie à la vérité ne nous dispose pas à ajouter beaucoup de foi aux raisonnemens de la Medecine systématique, aux hypothèses des physiciens ignorans, aux superstitions & aux préjugés populaires; elle accoutume à ne pas se contenter aisément en matiere de preuves: mais les vérités que la révélation nous découvre, sont si différentes de celles que la raison nous apprend, elles y ont si peu de rapport, que l'évidence des unes ne doit rien prendre sur le respect qu'on doit aux autres. Enfin la foi est une grace que Dieu donne à qui il lui plaît; & puisque l'Évangile n'a point défendu l'étude de la Géométrie, il est à croire que les *Géometres* sont aussi susceptibles de cette grace que le reste du genre humain. (O)



GÉOMÉTRIE, s. f. (*Ordre encycl. Entend. Rais. Philosoph. ou Science, Science de la Nat. Mathémath. Mathémath. pures, Géométrie.*) est la science des propriétés de l'étendue, en tant qu'on la considère comme simplement étendue & figurée.

Ce mot est formé de deux mots grecs, γῆ ou γαῖα, *terre*, & μέτρον, *mesure*; & cette étymologie semble nous indiquer ce qui

a donné naissance à la *Géométrie* : imparfaite & obscure dans son origine comme toutes les autres sciences, elle a commencé par une espèce de tâtonnement, par des mesures & des opérations grossières, & s'est élevée peu-à-peu à ce degré d'exactitude & de sublimité où nous la voyons.

Histoire abrégée de la Géométrie. Il y a apparence que la *Géométrie*, comme la plupart des autres sciences, est née en Egypte, qui paroît avoir été le berceau des connoissances humaines, ou, pour parler plus exactement, qui est de tous les pays que nous connoissons, celui où les Sciences paroissent avoir été le plus anciennement cultivées. Selon Hérodote & Strabon, les Egyptiens ne pouvant reconnoître les bornes de leurs héritages confondues par les inondations du Nil, inventerent l'art de mesurer & de diviser les terres, afin de distinguer les leurs par la considération de la figure qu'elles avoient, & de la surface qu'elles pouvoient contenir. Telle fut, dit-on, la première aurore de la *Géométrie*. Joseph, historien zélé pour sa nation, en attribue l'invention aux Hébreux; d'autres à Mercure. Que ces faits soient vrais ou non, il paroît certain que quand les hommes ont commencé à posséder des terres, & à vivre sous des lois différentes, ils n'ont pas été long-tems sans faire sur le terrain quelques opérations pour le mesurer, tant en longueur qu'en surface, en entier ou par parties; & voilà la *Géométrie* dans son origine.

De l'Egypte elle passa en Grece, où on prétend que Thalès la porta. Il ne se contenta pas d'apprendre aux Grecs ce qu'il avoit reçu des Egyptiens; il ajouta à ce qu'il avoit appris, & enrichit cette science de plusieurs propositions. Après lui vint Pythagore, qui cultiva aussi la *Géométrie* avec succès, & à qui on attribue la fameuse proposition du carré de l'hypothénuse. Voyez HYPOTHÉNUSE. On prétend qu'il fut si ravi de cette découverte, qu'il sacrifia de joie cent bœufs aux Muses. Il y a apparence, dit un auteur moderne, que c'étoient des bœufs de cire ou de pâte; car Pythagore défendoit de tuer les animaux, en conséquence de son système de la métempysycose, qui (pour un philosophe payen) n'étoit pas l'opinion du monde la plus absurde. Voyez MÉTEMPSYCOSE. Mais il y a plus d'apparence encore que le fait n'est pas vrai; ce qui dispense de l'expliquer. Après Pythagore, les philosophes & les écoles qu'ils formerent, continuèrent à cultiver l'étude de la *Géométrie*. Plutarque nous apprend qu'Anaxagore de Clazomene s'occupait du problème de la quadrature du cercle dans la prison où il avoit été renfermé, & qu'il composa même un ouvrage sur ce sujet. Cet Anaxagore avoit été accusé d'impiété, pour avoir dit que les astres étoient matériels; & il eût été condamné à mort, sans Periclès qui lui sauva la vie. On voit par cet exemple, s'il est permis de le dire en passant, que ce n'est pas d'aujourd'hui que les Philosophes sont persécutés pour avoir eu raison; & que les prêtres grecs étoient aussi habiles que certains théologiens modernes, à ériger en articles de religion ce qui n'en étoit pas.

Platon qui donnoit à Anaxagore de grands éloges sur son habileté en *Géométrie*, en méritoit aussi beaucoup lui-même. On fait qu'il donna une solution très simple du problème de la duplication du cube. Voyez DUPLICATION. On fait aussi que ce grand philosophe appelloit Dieu l'éternel géometre (idée vraiment juste & digne de l'Être suprême), & qu'il regardoit la *Géométrie* comme si nécessaire à l'étude de la Philosophie, qu'il avoit écrit sur la porte de son école ces paroles mémorables, qu'aucun ignorant en *Géométrie* n'entre ici. Entre Anaxagore & Platon, on doit placer

Hippocrate de Chio, qui mérite qu'on en fasse mention par sa fameuse quadrature de la lunule. Voyez LUNULE. Feu M. Cramer, professeur de Philosophie à Genève, nous a donné dans les mémoires de l'académie des Sciences de Prusse pour l'année 1748, une très-bonne dissertation sur ce géometre: on y lit qu'Hippocrate dans un voyage qu'il fit à Athenes, ayant eu occasion d'écouter les philosophes, prit tant de goût pour la *Géométrie*, qu'il y fit des progrès admirables; on ajoute que cette étude développa son talent, & qu'il avoit pour tout le reste l'esprit lent & bouché; ce qu'on raconte aussi de Clavius, bon géometre du seizième siècle. Il n'y a rien d'étonnant à tout cela; mais le comble de l'ineptie est d'en faire une règle. Voyez GÉOMETRE.

Euclide qui vivoit environ cinquante ans après Platon, & qu'il ne faut pas confondre avec Euclide de Megare contemporain de ce philosophe, recueillit ce que ses prédécesseurs avoient trouvé sur les élémens de *Géométrie*; il en composa l'ouvrage que nous avons de lui, & que bien des modernes regardent comme le meilleur en ce genre. Dans ces élémens il ne considère que les propriétés de la ligne droite & du cercle, & celles des surfaces & des solides rectilignes ou circulaires; ce n'est pas néanmoins que du tems d'Euclide il n'y eût d'autre courbe connue que le cercle; les Géometres s'étoient déjà aperçus qu'en coupant un cône de différentes manières, on formoit des courbes différentes du cercle, qu'ils nommerent *sections coniques*. Voy. CONIQUE & SECTION. Les différentes propriétés de ces courbes, que plusieurs mathématiciens découvrirent successivement, furent recueillies en huit livres par Apollonius de Perge, qui vivoit environ 250 ans avant J. C. Voyez APOLLONIEN. Ce fut lui, à ce qu'on prétend, qui donna aux trois sections coniques les noms qu'elles portent, de *parabole*, d'*ellipse*, & d'*hyperbole*, & dont on peut voir les raisons à leurs articles. A-peu-près en même tems qu'Apollonius, florissoit Archimede, dont nous avons de si beaux ouvrages sur la sphere & le cylindre, sur les conoïdes & les sphéroïdes, sur la quadrature du cercle qu'il trouva par une approximation très-simple & très-ingénieuse (Voyez QUADRATURE), & sur celle de la parabole qu'il détermina exactement. Nous avons aussi de lui un traité de la spirale, qui peut passer pour un chef-d'œuvre de sagacité & de pénétration. Les démonstrations qu'il donne dans cet ouvrage, quoique très-exactes, sont si difficiles à embrasser, qu'un savant mathématicien moderne, Bouillaud, avoue ne les avoir jamais bien entendues, & qu'un mathématicien de la plus grande force, notre illustre Viète, les a injustement soupçonnées de paralogisme, faute de les avoir bien comprises. Voyez la préface de l'*analyse des infiniment petits* de M. de l'Hôpital. Dans cette préface, qui est l'ouvrage de M. de Fontenelle, on a rapporté les deux passages de Bouillaud & de Viète, qui vérifient ce que nous avançons ici. On doit encore à Archimede d'autres écrits non moins admirables, qui ont rapport à la Méchanique plus qu'à la *Géométrie*, de *æquiperantibus*, de *insidentibus humido*; & quelques autres dont ce n'est pas ici le lieu de faire mention.

Nous ne parlons dans cette histoire que des Géometres dont il nous reste des écrits que le tems a épargnés; car s'il falloit nommer tous ceux qui dans l'antiquité se sont distingués en *Géométrie*, la liste en seroit trop longue; il faudroit faire mention d'Eudoxe de Cnide, d'Archytas de Tarente, de Philolaüs, d'Eratosthene, d'Aristarque de Samos, de Dinostrate si connu par sa quadratrice

(Voyez QUADRATRICE), de Menechme son frere, disciple de Platon, des deux Aristées, l'ancien & le jeune, de Conon, de Thrafidée, de Nicotele, de Leon, de Theudius, d'Hermodime, de Nicomede, inventeur de la conchoïde (V. CONCHOÏDE), & un peu plus jeune qu'Archimede & qu'Apollonius, & de plusieurs autres.

Les Grecs continuerent à cultiver la Philosophie, la *Géométrie*, & les Lettres, même après qu'ils eurent été subjugués par les Romains. La *Géométrie* & les Sciences en général, ne furent pas fort en honneur chez ce dernier peuple qui ne pensoit qu'à subjuguier & à gouverner le monde, & qui ne commença guere à cultiver l'éloquence même que vers la fin de la république. On a vû dans l'*article* ERUDITION avec quelle legereté Ciceron parle d'Archimede, qui pourtant ne lui étoit point inférieur; peut-être même est-ce faire quelque tort à un génie aussi sublime qu'Archimede, de ne le placer qu'à côté d'un bel esprit, qui dans les matieres philosophiques qu'il a traitées, n'a guere fait qu'exposer en longs & beaux discours, les chimeres qu'avoient pensées les autres. On étoit si ignorant à Rome sur les Mathématiques, qu'on donnoit en général le nom de *mathématiciens*, comme on le voit dans Tacite, à tous ceux qui se méloient de deviner, quoiqu'il y ait encore plus de distance des chimeres de la Divination & de l'Astrologie judiciaire aux Mathématiques, que de la pierre philosophale à la Chimie. Ce même Tacite, un des plus grands esprits qui ayent jamais écrit, nous donne par ses propres ouvrages une preuve de l'ignorance des Romains, dans les questions de *Géométrie* & d'Astronomie les plus élémentaires & les plus simples. Il dit dans la vie d'Agricola, en faisant la description de l'Angleterre, que vers l'extrémité septentrionale de cette ile, les grands jours d'été n'ont presque point de nuit; & voici la raison qu'il en apporte: *scilicet extrema & plana terrarum humili umbra non erigunt tenebras, infraque cælum & sydera nox cadit*. Nous n'entreprendrons point avec les commentateurs de Tacite, de donner un sens à ce qui n'en a point; nous nous contenterons d'avoir montré par cet exemple, que la manie d'étaler un faux savoir & de parler de ce qu'on n'entend pas, est fort ancienne. Un traducteur de Tacite dit que cet historien regarde la Terre dans ce passage comme *une sphere dont la base est environnée d'eau, &c.* Nous ne savons ce que c'est que la base d'une sphere.

Si les Romains cultiverent peu la *Géometrie* dans les tems les plus florissans de la république, il n'est pas surprenant qu'ils l'ayent encore moins cultivée dans la décadence de l'empire. Il n'en fut pas de même des Grecs; ils eurent depuis l'ere chrétienne même, & assez long-tems après la translation de l'empire, des géometres habiles. Ptolomée grand astronome & par conséquent grand géometre, car on ne peut être l'un sans l'autre, vivoit sous Marc-Aurele; & on peut voir au *mot* ASTRONOMIE, les noms de plusieurs autres. Nous avons encore les ouvrages de Pappus d'Alexandrie, qui vivoit du tems de Théodosé; Eutocius Afcalonite, qui vivoit après lui vers l'an 540 de l'ere chrétienne, nous a donné un commentaire sur la mesure du cercle par Archimede. Proclus qui vivoit sous l'empire d'Anaftase au cinquieme & sixieme siecles, démontra les théorèmes d'Euclide, & son commentaire sur cet auteur est parvenu jusqu'à nous. Ce Proclus est encore plus fameux par les miroirs (vrais ou supposés) dont il se servit, dit-on, pour brûler la flotte de Vitalien qui assiégeoit Constantinople. Voyez ARDENT & MIROIR. Entre Eutocius & Pappus, il y a apparence qu'on doit placer Dioclès, connu par sa cissoïde (Voyez CISOÏDE), mais dont

on ne connoît guere que le nom, car on ne fait pas précisément le tems où il a vécu.

L'ignorance profonde qui couvrit la surface de la Terre & surtout l'Occident, depuis la destruction de l'empire par les Barbares, nuisit à la *Géométrie* comme à toutes les autres connoissances; on ne trouve plus guere ni chez les Latins, ni même chez les Grecs, d'hommes versés dans cette partie; il y en eut seulement quelques-uns qu'on appelloit sàvans, parce qu'ils étoient moins ignorans que les autres, & quelques-uns de ceux-là, comme Gerbert, passerent pour magiciens; mais s'ils eurent quelque connoissance des découvertes de leurs prédécesseurs, il n'y ajoutèrent rien, du moins quant à la *Géométrie*; nous ne connoissons aucun théoreme important dont cette science leur soit redevable: c'étoit principalement par rapport à l'Astronomie qu'on étudioit alors le peu de *Géométrie* qu'on vouloit sàvoir, & c'étoit principalement par rapport au calendrier & au comput ecclésiastique qu'on étudioit l'Astronomie; ainsi l'étude de la *Géométrie* n'étoit pas poussée fort loin. On peut voir au *mot* ASTRONOMIE, les noms des principaux mathématiciens des siecles d'ignorance. Il en est un que nous ne devons pas oublier; c'est Vitellion sàvant polonois du treizieme siecle, dont nous avons un traité d'Optique très-estimable pour ce tems-là, & qui suppose des connoissances géométriques. Ce Vitellion nous rappelle l'arabe Alhazen, qui vivoit environ un siecle avant lui, & qui cultivoit aussi les Mathématiques avec succès. Les siecles d'ignorance chez les Chrétiens ont été les siecles de lumiere & de sàvoir chez les Arabes; cette nation a produit depuis le 9^e jusqu'au 14^e siecle, des astronomes, des géometres, des géographes, des chimistes, &c. Il y a apparence qu'on doit aux Arabes les premiers élémens de l'Algebre: mais leurs ouvrages de *Géométrie* dont il est ici principalement question, ne sont point parvenus jusqu'à nous pour la plûpart, ou sont encore manuscrits. C'est sur une traduction arabe d'Apollonius qu'a été faite en 1661 l'édition du cinquieme, du sixieme & du septieme livre de cet auteur. Voyez APOLLONIEN. Cette traduction étoit d'un géometre arabe nommé *Abalphat*, qui vivoit à la fin du dixieme siecle. Il n'y avoit peut-être pas alors parmi les Chrétiens un seul géometre qui fût en état d'entendre Apollonius; il auroit fallu d'ailleurs pour le traduire sàvoir en même tems le grec & la *Géométrie*, ce qui n'est pas fort commun, même dans notre siecle.

À la renaissance des lettres, on se borna presque uniquement à traduire & à commenter les ouvrages de *Géométrie* des anciens; & cette science fit d'ailleurs peu de progrès jusqu'à Descartes: ce grand homme publia en 1637 sa *géométrie*, & la commença par la solution d'un probleme où Pappus dit que les anciens mathématiciens étoient restés. Mais ce qui est plus précieux encore que la solution de ce problème, c'est l'instrument dont il se servit pour y parvenir, & qui ouvrit la route à la solution d'une infinité d'autres questions plus difficiles. Nous voulons parler de l'application de l'Algebre à la *Géométrie*; application dont nous ferons sentir le mérite & l'usage dans la suite de cet article: c'étoit là le plus grand pas que la *Géométrie* eût fait depuis Archimede; & c'est l'origine des progrès surprenans que cette science a faits dans la suite.

On doit à Descartes non-seulement l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, mais les premiers essais de l'application de la *Géométrie* à la Physique, qui a été poussée si loin dans ces derniers tems. Ces essais qui se voyent principalement dans sa *dioptrique*, & dans

quelques endroits de ses *météores*, faisoient dire à ce philosophe que toute sa *physique* n'étoit autre chose que *Géométrie* : elle n'en auroit valu que mieux si elle eût eu en effet cet avantage ; mais malheureusement la physique de Descartes consistoit plus en hypothèses qu'en calculs ; & l'Analyse a renversé depuis la plupart de ces hypothèses. Ainsi la *Géométrie* qui doit tant à Descartes, est ce qui a nui le plus à sa physique. Mais ce grand homme n'en a pas moins la gloire d'avoir appliqué le premier avec quelque succès la *Géométrie* à la science de la nature ; comme il a le mérite d'avoir pensé le premier qu'il y avoit des lois du mouvement, quoiqu'il se soit trompé sur ces lois. *Voyez* COMMUNICATION DU MOUVEMENT.

Tandis que Descartes ouvroit dans la *Géométrie* une carrière nouvelle, d'autres mathématiciens s'y frayoiént aussi des routes à d'autres égards, & préparoiént, quoique foiblement, cette *Géométrie* de l'infini, qui à l'aide de l'Analyse, devoit faire dans la suite de si grands progrès. En 1635, deux ans avant la publication de la *Géométrie* de Descartes, Bonaventure Cavalérius, religieux italien de l'ordre des Jésuites, qui ne subsiste plus, avoit donné sa *géométrie des indivisibles* : dans cet ouvrage, il considère les plans comme formés par des suites infinies de lignes, qu'il appelle *quantités indivisibles*, & les solides par des suites infinies de plans ; & par ce moyen, il parvient à trouver la surface de certaines figures & la solidité de certains corps. Comme l'infini employé à la manière de Cavalérius étoit alors nouveau en *Géométrie*, & que ce religieux craignoit des contradicteurs, il tâcha d'adoucir ce terme par celui d'*indéfini*, qui au fond ne signifioit en cette occasion que la même chose. Malgré cette espèce de palliatif, il trouva beaucoup d'adversaires, mais il eut aussi des partisans ; ceux-ci en adoptant l'idée de Cavalérius la rendirent plus exacte, & substituèrent aux lignes qui composoient les plans de Cavalérius, des parallélogrammes infiniment petits ; aux plans indivisibles de Cavalérius, des solides d'une épaisseur infiniment petite : ils considérèrent les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés, & parvinrent par ce moyen à trouver la surface de certains espaces curvilignes, la rectification de certaines courbes, la mesure de certains solides, les centres de gravité des uns & des autres : Grégoire de Saint-Vincent, & sur-tout Pascal, se distinguèrent l'un & l'autre en ce genre ; le premier, dans son traité intitulé, *quadratura circuli & hyperbolæ*, 1647. où il mêla à quelques paralogismes de très-beaux théorèmes ; & le second, par son traité de la roulette ou cycloïde (*V. CYCLOÏDE*), qui paroît avoir demandé les plus grands efforts d'esprit ; car on n'avoit point encore trouvé le moyen de rendre la *Géométrie* de l'infini beaucoup plus facile en y appliquant le calcul.

Cependant le moment de cette heureuse découverte approchoit ; Fermat imagina le premier la méthode des tangentes par les différences ; Barrow la perfectionna en imaginant son petit triangle différentiel, & en se servant du calcul analytique, pour découvrir le rapport des petits côtés de ce triangle, & par ce moyen la sous-tangente des courbes. *Voyez* DIFFÉRENTIEL.

D'un autre côté on fit réflexion que les plans ou solides infiniment petits, dont les surfaces ou les solides pouvoient être supposés formés, croissoient ou décroissoient dans chaque surface ou solide, suivant différentes lois ; & qu'ainsi la recherche de la mesure de ces surfaces ou de ces solides se réduisoit à connoître la somme d'une série ou suite infinie de quantités croissantes ou

décroissantes. On s'appliqua donc à la recherche de la somme des suites ; c'est ce qu'on appella l'*arithmétique des infinis* ; on parvint à en sommer plusieurs, & on appliqua aux figures géométriques les résultats de cette méthode. Wallis, Mercator, Brouncker, Jacques Grégori, Huyghens, & quelques autres se signalèrent en ce genre ; ils firent plus ; ils réduisirent certains espaces & certains arcs de courbes en séries convergentes, c'est-à-dire dont les termes alloient toujours en diminuant ; & par-là ils donnerent le moyen de trouver la valeur de ces espaces & de ces arcs, sinon exactement, au-moins par approximation : car on approchoit d'autant plus de la vraie valeur, qu'on prenoit un plus grand nombre de termes de la suite ou série infinie qui l'exprimoit. *Voyez* SUITE, SÉRIE, APPROXIMATION, &c.

Tous les matériaux du calcul différentiel étoient prêts ; il ne restoit plus que le dernier pas à faire. M. Leibnitz publia le premier en 1684 les règles de ce calcul, que M. Newton avoit déjà trouvées de son côté : nous avons discuté au mot DIFFÉRENTIEL, la question si Leibnitz peut être regardé comme inventeur. Les illustres frères Bernoulli trouverent les démonstrations des règles données par Leibnitz ; & Jean Bernoulli y ajouta quelques années après, la méthode de différentier les quantités exponentielles. *Voyez* EXPONENTIEL.

M. Newton n'a pas moins contribué au progrès de la *Géométrie* pure par deux autres ouvrages ; l'un est son traité de *quadraturâ curvarum*, où il enseigne la manière de quarrer les courbes par le calcul intégral, qui est l'inverse du différentiel ; ou de réduire la quadrature des courbes, lorsque cela est possible, à celle d'autres courbes plus simples, principalement du cercle & de l'hyperbole : le second ouvrage est son *enumeratio linearum tertii ordinis*, où appliquant heureusement le calcul aux courbes dont l'équation est du 3^e degré, il divise ces courbes en genres & espèces, & en fait l'énumération. *Voyez* COURBE.

Mais ces écrits, quelque admirables qu'ils soient, ne sont rien, pour ainsi dire, en comparaison de l'immortel ouvrage du même auteur, intitulé, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, qu'on peut regarder comme l'application la plus étendue, la plus admirable, & la plus heureuse qui ait jamais été faite de la *Géométrie* à la Physique : ce livre est aujourd'hui trop connu pour que nous entrions dans un plus grand détail ; il a été l'époque d'une révolution dans la Physique : il a fait de cette science une science nouvelle, toute fondée sur l'observation, l'expérience, & le calcul. *Voyez* NEWTONIANISME, GRAVITATION, ATTRACTION, &c. Nous ne parlons point de l'*optique* du même auteur, ouvrage non moins digne d'éloges, mais qui n'appartient point à cet article, ni de quelques autres écrits géométriques moins considérables, mais tous de la première force, tous brillans de sagacité & d'invention ; comme son *analysis per æquationes numero terminorum infinitas* ; son *analysis per æquationum series, fluxiones & differentias* ; la *méthode des fluxions* ; sa *méthode différentielle*, &c. Quand on considère ces monumens immortels du génie de leur auteur, & quand on songe que ce grand homme avoit fait à vingt-quatre ans ses principales découvertes, on est presque tenté de souscrire à ce que dit Pope, que la sagacité de Newton étonna les intelligences célestes, & qu'ils le regardèrent comme un être moyen entre l'homme & elles : on est du-moins bien fondé à s'écrier, *homo homini quid præstat* ! qu'il y a de distance entre un homme & un autre !

L'édifice élevé par Newton à cette hauteur immense, n'étoit pourtant pas encore achevé; le calcul intégral a été depuis extrêmement augmenté par MM. Bernoulli, Cotes, Maclaurin, &c. & par les mathématiciens qui sont venus après eux. Voyez INTÉGRAL. On a fait des applications encore plus subtiles, & si on l'ose dire, plus difficiles, plus heureuses & plus exactes de la *Géométrie* à la Physique. On a beaucoup ajouté à ce que Newton avoit commencé sur le système du monde : c'est sur-tout quant à cette partie qu'on a corrigé & perfectionné son grand ouvrage des *Principes mathématiques*. La plupart des mathématiciens qui ont contribué à enrichir ainsi la *Géométrie* par leurs découvertes, & à l'appliquer à la Physique & à l'Astronomie, étant aujourd'hui vivans, & nous même ayant peut-être eu quelque part à ces travaux, nous laisserons à la postérité le soin de rendre à chacun la justice qu'il mérite : & nous terminerons ici cette petite histoire de la *Géométrie*; ceux qui voudront s'en instruire plus à fond, pourront consulter les divers auteurs qui ont écrit sur ce sujet. Parmi ces auteurs il en est qui ne sont pas toujours exacts, entr'autres Wallis, que sa partialité en faveur des Anglois, doit faire lire avec précaution, voy. ALGÈBRE. Mais nous croyons qu'on trouvera tout ce qu'on peut désirer sur ce sujet dans l'*histoire des Mathématiques* que prépare M. de Montucla, de l'académie royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse, déjà connu par son *histoire de la quadrature du cercle*, publiée en 1754, & que nous avons citée au mot DUPLICATION.

L'histoire abrégée que nous venons de donner est plus que suffisante dans un ouvrage tel que le nôtre, où nous devons principalement nous attacher à faire connoître les inventeurs, non les inventeurs en détail à qui la *Géométrie* doit quelques propositions particulières & isolées, mais les esprits vraiment créateurs, les inventeurs en grand qui ont ouvert des routes, perfectionné l'instrument des découvertes, & imaginé des méthodes. Au reste en finissant cette histoire, nous ne pouvons nous dispenser de remarquer à l'honneur de notre nation, que si la *Géométrie* nouvelle est principalement due aux Anglois & aux Allemands, c'est aux François qu'on est redevable des deux grandes idées qui ont conduit à la trouver. On doit à Descartes l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, sur laquelle le calcul différentiel est fondé; & à Fermat, la première application du calcul aux quantités différentielles, pour trouver les tangentes : la *Géométrie* nouvelle n'est que cette dernière méthode généralisée. Si on ajoute à cela ce que les François actuellement vivans ont fait en *Géométrie*, on conviendra peut-être que cette science ne doit pas moins à notre nation qu'aux autres.

Objet de la Géométrie. Nous prions d'abord le lecteur de se rappeler ce que nous avons dit sur ce sujet dans le *Discours prélimin.* Nous commençons par considérer les corps avec toutes leurs propriétés sensibles; nous faisons ensuite peu-à-peu & par l'esprit la séparation & l'abstraction de ces différentes propriétés; & nous en venons à considérer les corps comme des portions d'étendue pénétrables, divisibles, & figurées. Ainsi le corps géométrique n'est proprement qu'une portion d'étendue terminée en tout sens. Nous considérons d'abord & comme d'une vue générale, cette portion d'étendue quant à ses trois dimensions; mais ensuite, pour en déterminer plus facilement les propriétés, nous y considérons d'abord une seule dimension, c'est-à-dire la longueur, puis deux dimensions, c'est-à-dire la surface, enfin les trois dimensions ensemble, c'est-à-dire la solidité : ainsi les propriétés des lignes, celles

des surfaces & celles des solides sont l'objet & la division naturelle de la *Géométrie*.

C'est par une simple abstraction de l'esprit, qu'on considère les lignes comme sans largeur, & les surfaces comme sans profondeur : la *Géométrie* envisage donc les corps dans un état d'abstraction où ils ne sont pas réellement; les vérités qu'elle découvre & qu'elle démontre sur les corps, sont donc des vérités de pure abstraction, des vérités hypothétiques; mais ces vérités n'en sont pas moins utiles. Dans la nature, par exemple, il n'y a point de cercle parfait; mais plus un cercle approchera de l'être, plus il approchera d'avoir exactement & rigoureusement les propriétés du cercle parfait que la *Géométrie* démontre; & il peut en approcher assez exactement pour avoir toutes ces propriétés, sinon en rigueur, au moins à un degré suffisant pour notre usage.

On connoît en *Géométrie* plusieurs courbes qui s'approchent continuellement d'une ligne droite sans jamais la rencontrer, mais qui étant tracées sur le papier, se confondent sensiblement avec cette ligne droite au bout d'un assez petit espace, voyez ASYMPTOTE; il en est de même des vérités géométriques. Elles sont en quelque manière la limite, & si on peut parler ainsi, l'*asymptote* des vérités physiques, le terme dont celles-ci peuvent approcher aussi près qu'on veut, sans jamais y arriver exactement. Mais si les théorèmes mathématiques n'ont pas exactement lieu dans la nature, ces théorèmes servent du-moins à trouver avec une précision suffisante pour la pratique, la distance inaccessible d'un lieu à un autre, la mesure d'une surface donnée, le toisé d'un solide; à calculer le mouvement & la distance des astres; à prédire les phénomènes célestes. Pour démontrer des vérités en toute rigueur, lorsqu'il est question de la figure des corps, on est obligé de considérer ces corps dans un état de perfection abstraite qu'ils n'ont pas réellement : en effet, si on ne s'affujettit pas, par exemple, à regarder le cercle comme parfait, il faudra autant de théorèmes différens sur le cercle, qu'on imaginera de figures différentes plus ou moins approchantes du cercle parfait; & ces figures elles-mêmes pourront être encore absolument hypothétiques & n'avoir point de modèle existant dans la nature. Les lignes qu'on considère en *Géométrie*, ne sont ni parfaitement droites ni parfaitement courbes, les surfaces ne sont ni parfaitement planes ni parfaitement curvilignes : mais plus elles approcheront de l'être, plus elles approcheront d'avoir les propriétés qu'on démontre des lignes exactement droites ou courbes, des surfaces exactement planes ou curvilignes. Ces réflexions suffiront, ce me semble, pour répondre à deux espèces de censeurs de la *Géométrie* : les uns, ce sont les Sceptiques, accusent les théorèmes mathématiques de fausseté, comme supposant ce qui n'existe pas réellement, des lignes sans largeur, des surfaces sans profondeur; les autres, ce sont les physiciens ignorans en Mathématique, regardent les vérités de *Géométrie* comme fondées sur des hypothèses inutiles, & comme des jeux d'esprit qui n'ont point d'application.

Division de la Géométrie. On peut diviser la *Géométrie* de différentes manières : 1^o. En élémentaire & en transcendante. La *Géométrie* élémentaire ne considère que les propriétés des lignes droites, des lignes circulaires, des figures & des solides les plus simples, c'est-à-dire des figures rectilignes ou circulaires, & des solides terminés par ces figures. Le cercle est la seule figure curviligne dont on parle dans les élémens de *Géométrie*; la simplicité de sa description, la facilité avec laquelle les propriétés du cercle

s'en déduisent, & la nécessité de se servir du cercle pour différentes opérations très-simples, comme pour élever une perpendiculaire, pour mesurer un angle, &c. toutes ces raisons ont déterminé à faire entrer le cercle & le cercle seul dans les élémens de *Géométrie*. Cependant quelques courbes, comme la parabole, ont une équation plus simple que celle du cercle; d'autres, comme l'hyperbole équilatère, ont une équation aussi simple, *V. EQUATION & COURBE*: mais leur description est beaucoup moins facile que celle du cercle, & leurs propriétés moins aisées à déduire. On peut rapporter aussi à la *Géométrie* élémentaire la solution des problèmes du second degré par la ligne droite & par le cercle. *Voyez CONSTRUCTION, COURBE, & ÉQUATION.*

La *Géométrie* transcendante est proprement celle qui a pour objet toutes les courbes différentes du cercle, comme les sections coniques & les courbes d'un genre plus élevé. *Voyez COURBE.*

Cette *Géométrie* s'occupe aussi de la solution des problèmes du troisième & du quatrième degré & des degrés supérieurs. Les premiers se résolvent, comme l'on fait, par le moyen de deux sections coniques, ou plus simplement & en général par le moyen d'un cercle & d'une parabole; les autres se résolvent par des lignes du troisième ordre & au-delà. *V. COURBE, & les art. déjà cités.* La partie de la *Géométrie* transcendante qui applique le calcul différentiel & intégral à la recherche des propriétés des courbes, est celle qu'on appelle plus proprement *Géométrie transcendante*, & qu'on pourroit nommer avec quelques auteurs modernes, *Géométrie sublime*, pour la distinguer non-seulement de la *Géométrie* élémentaire, mais de la *Géométrie* des courbes qui n'emploie pas les calculs différentiel & intégral, & qui se borne ou à la synthèse des anciens, ou à la simple application de l'analyse ordinaire. Par-là on auroit trois divisions de la *Géométrie*; *Géométrie élémentaire* ou des lignes droites & du cercle; *Géométrie transcendante* ou des courbes; & *Géométrie sublime* ou des nouveaux calculs.

2°. On divise aussi la *Géométrie* en ancienne & moderne. On entend par *Géométrie ancienne*, ou celle qui n'emploie point le calcul analytique, ou celle qui emploie le calcul analytique ordinaire, sans se servir des calculs différentiel & intégral; & par *Géométrie moderne*, on entend ou celle qui emploie l'analyse de Descartes dans la recherche des propriétés des courbes, ou celle qui se sert des nouveaux calculs. Ainsi la *Géométrie*, entant qu'elle se borne à l'analyse seule de Descartes, est ancienne ou moderne, suivant les rapports sous lesquels on la considère; moderne par rapport à celle d'Apollonius & d'Archimède, qui n'employoient point le calcul; ancienne, par rapport à la *Géométrie* que nous avons nommée *sublime*, que Leibnitz & Newton nous ont apprise, & que leurs successeurs ont perfectionnée.

Des élémens de Géométrie. On a donné au mot *ÉLÉMENTS DES SCIENCES*, des principes qui s'appliquent naturellement aux élémens de *Géométrie*: on y a même traité des questions qui ont un rapport particulier à ces élémens; par exemple, si on doit suivre dans les élémens d'une science l'ordre des inventeurs; si on y doit préférer la facilité à la rigueur exacte, &c. c'est pourquoi nous renvoyons à l'article *ÉLÉMENTS*. Nous observons seulement que dans la liste d'élémens de *Géométrie* donnée par M. de la Chapelle, on a oublié ceux de M. Camus, de l'Académie des Sciences, composés pour l'usage des ingénieurs, & qui méritent qu'on en fasse une mention honorable; ainsi que la *Géométrie de l'officier*, de M. le Blond, un de nos collègues, & les *élémens de Géométrie* du même

auteur. Ajoutons ici quelques réflexions qui pourront n'être pas inutiles, sur la manière de traiter les *élémens de Géométrie*.

Nous observerons d'abord, & ceci est une remarque peu importante, mais utile, que la division ordinaire de la *Géométrie* élémentaire en Longimétrie, Planimétrie, & Stéréométrie, n'est point exacte, à parler à la rigueur, puisqu'on y mesure non-seulement des lignes droites, des plans, & des solides, mais aussi des lignes circulaires & des surfaces sphériques: mais nous ne pouvons qu'approuver la division naturelle de la *Géométrie* élémentaire en *géométrie* des lignes droites & des lignes circulaires, *géométrie* des surfaces, *géométrie* des solides.

On peut voir au mot *COURBE*, ce que nous pensons sur la meilleure définition possible de la ligne droite & de la ligne courbe. Quoique la ligne droite soit plus simple que la circulaire, cependant il est à propos de traiter de l'une & de l'autre, ensemble & non séparément, dans des élémens de *Géométrie*; parce que les propriétés de la ligne circulaire sont d'une utilité infinie pour démontrer d'une manière simple & facile ce qui regarde les lignes droites comparées entr'elles quant à leur position. La mesure d'un angle est un arc de cercle décrit du sommet de l'angle comme rayon. On a vu au mot *DEGRÉ*, pp. 761 & 762 du *IV. vol.* pourquoi le cercle est la mesure naturelle des angles. Cela vient de l'uniformité des parties & de la courbure du cercle; & quand on dit que la mesure d'un angle est un arc de cercle décrit du sommet, cela signifie seulement que si deux angles sont égaux, les arcs décrits de leur sommet & du même rayon feront égaux: de même, quand on dit qu'un angle est double d'un autre, cela signifie seulement que l'arc décrit du sommet de l'un est double de l'arc décrit du sommet de l'autre: car l'angle n'étant, suivant sa définition, qu'une ouverture simple, & non pas une étendue, on ne peut pas dire proprement & abstraction faite de toute considération d'étendue, qu'un angle soit double d'un autre; parce que cela ne se peut dire que d'une quantité comparée à une autre quantité homogène, & que l'ouverture de deux lignes n'ayant point de parties, n'est pas proprement une quantité. Quand on dit de même qu'un angle à la circonférence du cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, cela signifie que cet angle est égal à un angle dont le sommet seroit au centre, & qui renfermeroit la moitié de cet arc; & ainsi du reste.

Ces petites observations ne feront pas inutiles pour donner aux commençans des notions distinctes sur la mesure des angles, & pour leur faire sentir, ainsi que nous l'avons dit au mot *ÉLÉMENTS*, quel est le véritable sens qu'on doit donner à certaines façons de parler abrégées dont on se sert dans chaque science, & que les inventeurs ont imaginées pour éviter les circonlocutions.

La proposition très-simple sur la mesure des angles par un arc décrit de leur sommet, étant jointe au principe de la superposition, peut servir, si je ne me trompe, à démontrer toutes les propositions qui ont rapport à la *Géométrie* élémentaire des lignes. Le principe de la superposition n'est point, comme le disent quelques géomètres modernes, un principe mécanique & grossier; c'est un principe rigoureux, clair, simple, & tiré de la vraie nature de la chose. Quand on veut démontrer, par exemple, que deux triangles qui ont des bases égales & les angles à la base égaux, sont égaux en tout, on emploie le principe de superposition avec succès: de l'égalité supposée des bases & des angles, on conclut avec raison que ces bases & ces angles appliqués les uns sur les autres, coïncideront;

ensuite de la coïncidence de ces parties, on conclut évidemment & par une conséquence nécessaire, la coïncidence du reste, & par conséquent l'égalité & la similitude parfaite des deux triangles : ainsi le principe de la superposition ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour en conclure l'égalité des deux, comme un ouvrier applique son pié sur une longueur pour la mesurer : mais ce principe consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, & à conclure, 1°. de l'égalité supposée des parties données, la coïncidence de ces parties; 2°. de cette coïncidence, la coïncidence du reste, & par conséquent l'égalité totale & la similitude parfaite des deux figures. On peut, par la même raison, employer le principe de la superposition à prouver que deux figures ne sont pas les mêmes. Au reste, par superposition j'entens ici non-seulement l'application d'une figure sur une autre, mais celle d'une partie, d'une figure sur une autre partie de la même figure, à dessein de les comparer entre elles; & cette dernière manière d'employer le principe de la superposition, est d'un usage infini & très-simple dans les élémens de *Géométrie*. Voyez CONGRUENCE.

Après avoir traité de la *géométrie* des lignes considérées par rapport à leur position, je crois qu'on doit traiter de la *géométrie* des lignes considérées quant au rapport qu'elles peuvent avoir entr'elles. Elle est toute fondée sur ce théorème qu'une ligne parallèle à la base d'un triangle en coupe les côtés proportionnellement. Pour cela il suffit de montrer que si cette parallèle passe par le point de milieu d'un des côtés, elle passera par le point de milieu de l'autre; car on fera voir ensuite aisément que les parties coupées sont toujours proportionnelles, quand la partie coupée sera commensurable à la ligne entière; & quand elle ne le fera pas, on démontrera la même proposition par la réduction à l'absurde, en faisant voir que le rapport ne peut être ni plus grand, ni plus petit, & qu'ainsi il est égal. Nous disons *par la réduction à l'absurde*, car on ne peut démontrer que de cette manière, & non d'une manière directe, la plupart des propositions qui regardent les incommensurables. L'idée de l'infini entre au-moins implicitement dans la notion de ces sortes de quantités; & comme nous n'avons qu'une idée négative de l'infini, c'est-à-dire que nous ne le concevons que par la négation du fini, on ne peut démontrer directement & *a priori* tout ce qui concerne l'infini mathématique. Voyez DÉMONSTRATION, INFINI, & INCOMMENSURABLE. Nous ne faisons qu'indiquer ce genre de démonstration; mais il y en a tant d'exemples dans les ouvrages de *Géométrie*, que les mathématiciens tant soit-peu exercés nous comprendront aisément. Pour éviter la difficulté des incommensurables, on démontre ordinairement la proposition dont il s'agit, en supposant que deux triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases. Mais cette dernière proposition elle-même, pour être démontrée en rigueur, suppose qu'on ait parlé des incommensurables. D'ailleurs elle suppose la mesure des triangles, & par conséquent la *géométrie* des surfaces, qui est d'un ordre supérieur à la *géométrie* des lignes. C'est donc s'écarter de la généalogie naturelle des idées, que de s'y prendre ainsi. On dira peut-être que la considération des incommensurables rendra la *géométrie* élémentaire plus difficile, cela se peut; mais ils entrent nécessairement dans cette *géométrie*; il faut y venir tôt ou tard, & le plutôt est le mieux, d'autant plus que la théorie des proportions des lignes amène naturellement cette considération : Toute la théorie des incommensurables ne demande qu'une seule proposition, qui concerne les limites des quantités; savoir que

les grandeurs qui sont la limite d'une même grandeur, ou les grandeurs qui ont une même limite, sont égales entr'elles (*voyez* LIMITE, EXHAUSTION, & DIFFÉRENTIEL); principe d'un usage universel en *Géométrie*, & qui par conséquent doit entrer dans les élémens de cette science, & s'y trouver presque dès l'entrée.

La *géométrie* des surfaces se réduit à leur mesure; & cette mesure est fondée sur un seul principe, celui de la mesure du parallélogramme rectangle qu'on fait être le produit de sa hauteur par sa base. Nous avons expliqué à la fin du mot EQUATION ce que cela signifie, & la manière dont cette proposition doit être énoncée dans des élémens, pour ne laisser dans l'esprit aucun nuage. De la mesure du parallélogramme rectangle se tire celle des autres parallélogrammes, celle des triangles qui en sont la moitié, comme le principe de la superposition peut le faire voir; enfin celle de toutes les figures planes rectilignes, qui peuvent être regardées comme composées de triangles. A l'égard de la mesure du cercle, le principe des limites ou d'exhaustion servira à la trouver. Il suffira pour cela de faire voir que le produit de la circonférence par la moitié du rayon est la limite de l'aire des polygones inscrits & circonscrits; & comme l'aire du cercle est aussi évidemment cette limite, il s'ensuit que l'aire du cercle est le produit de la circonférence par la moitié du rayon, ou du rayon par la moitié de la circonférence. Voyez CERCLE & QUADRATURE.

On peut rapprocher la théorie de la proportion des lignes de la théorie des surfaces par ce théorème, que quand quatre lignes sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal au produit des moyennes; théorème qu'on peut démontrer par la *Géométrie* sans aucun calcul algébrique; car le calcul algébrique ne facilite en rien les élémens de *Géométrie*, & par conséquent ne doit pas y entrer. En rapprochant la théorie des proportions de celle des surfaces, on peut faire voir comment ces deux théories prises séparément s'accordent à démontrer différentes propositions, par exemple, celle du carré de l'hypothénuse. Ce n'est pas une chose aussi inutile qu'on pourroit le penser, de démontrer ainsi de différentes manières dans des élémens de *Géométrie* certaines propositions principales; par ce moyen l'esprit s'étend & se fortifie en voyant de quelle manière on fait rentrer les vérités les unes dans les autres.

Dans la *géométrie* des solides on suivra la même méthode que dans celle des surfaces : on réduira tout à la mesure du parallélépipède rectangle; la seule difficulté se réduira à prouver qu'une pyramide est le tiers d'un parallélépipède de même base & de même hauteur. Pour cela on fera voir d'abord, ce qui est très-facile par la méthode d'exhaustion, que les pyramides de même base & de même hauteur sont égales; ensuite, ce qui se peut faire de différentes manières, comme on le peut voir dans divers élémens de *Géométrie*, on prouvera qu'une certaine pyramide déterminée est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur; & il ne restera plus de difficulté. Par ce moyen on aura la mesure de tous les solides terminés par des figures planes. Il ne restera plus qu'à appliquer à la surface & à la solidité de la sphère les propositions trouvées sur la mesure des surfaces & des solides; c'est de quoi on viendra aisément à-bout par la méthode d'exhaustion, comme on a fait pour la mesure du cercle; peut-être même pourroit-on, pour plus d'ordre & de méthode, traiter de la surface sphérique dans la *géométrie* des surfaces.

Nous ne devons pas oublier ici une observation importante. Le principe de la méthode d'exhaustion est simple (*voyez EXHAUSTION*); mais son application peut quelquefois rendre les démonstrations longues & compliquées. Ainsi il ne seroit peut-être pas mal-à-propos de substituer le principe des infiniment petits à celui d'exhaustion, après avoir montré l'identité de ces deux principes, & avoir remarqué que le premier n'est qu'une façon abrégée d'exprimer le second; car c'est en effet tout ce qu'il est, n'y ayant dans la nature ni infinis actuels, ni infiniment petits. *Voyez INFINI, DIFFÉRENTIEL, EXHAUSTION, & LIMITE.* Par ce moyen la facilité des démonstrations sera plus grande, sans que la rigueur y perde rien.

Voilà, ce me semble, le plan qu'on peut suivre en traitant de la *géométrie élémentaire*. Ce plan, & les réflexions générales que nous avons faites à la fin du *MOT ÉLÉMENTS DES SCIENCES*, suffissent pour faire sentir qu'il n'y a aucun géomètre au-dessus d'une pareille entreprise; qu'elle ne peut même être bien exécutée que par des mathématiciens du premier ordre; & qu'enfin pour faire d'excellens élémens de *Géométrie*, Descartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, &c. n'eussent pas été de trop. Cependant il n'y a peut-être pas de science sur laquelle on ait tant multiplié les élémens, sans compter ceux que l'on nous donnera sans doute encore. Ces élémens sont pour la plupart l'ouvrage de mathématiciens médiocres, dont les connoissances en *Géométrie* ne vont pas souvent au-delà de leur livre, & qui par cela même sont incapables de bien traiter cette matière. Ajoutons qu'il n'y a presque pas d'auteur d'élémens de *Géométrie*, qui dans sa préface ne dise plus ou moins de mal de tous ceux qui l'ont précédé. Un ouvrage en ce genre, qui seroit au gré de tout le monde, est encore à faire; mais c'est peut-être une entreprise chimérique que de croire pouvoir faire au gré de tout le monde un pareil ouvrage. Tous ceux qui étudient la *Géométrie* ne l'étudient pas dans les mêmes vues: les uns veulent se borner à la pratique; & pour ceux-là un bon traité de *géométrie-pratique* suffit, en y joignant, si l'on veut, quelques raisonnemens qui éclairent les opérations jusqu'à un certain point, & qui les empêchent d'être bornées à une aveugle routine: d'autres veulent avoir une teinture de *géométrie élémentaire* spéculative, sans prétendre pousser cette étude plus loin; pour ceux-là il n'est pas nécessaire de mettre une si grande rigueur dans les élémens; on peut supposer comme vraies plusieurs propositions, dont la vérité s'aperçoit assez d'elle-même, & qu'on démontre dans les élémens ordinaires. Il est enfin des étudiants qui n'ont pas la force d'esprit nécessaire pour embrasser à-la-fois les différentes branches d'une démonstration compliquée; & il faut à ceux-là des démonstrations plus faciles, dussent-elles être moins rigoureuses. Mais pour les esprits vraiment propres à cette science, pour ceux qui sont destinés à y faire des progrès, nous croyons qu'il n'y a qu'une seule manière de traiter les élémens; c'est celle qui joindra la rigueur à la netteté, & qui en même tems mettra sur la voie des découvertes par la manière dont on y présentera les démonstrations. Pour cela il faut les montrer, autant qu'il est possible, sous la forme de problèmes à résoudre plutôt que de théorèmes à prouver, pourvu que d'un autre côté cette méthode ne nuise point à la généalogie naturelle des idées & des propositions, & qu'elle n'engage pas à supposer comme vrai, ce qui en rigueur géométrique a besoin de preuve.

On a vu au *MOT AXIOME* de quelle inutilité ces sortes de principes sont dans toutes les Sciences; il est donc très-à-propos de les

supprimer dans des élémens de *Géométrie*, quoiqu'il n'y en ait presque point où on ne les voye paroître encore. Quel besoin a-t-on des axiomes sur le tout & sur la partie, pour voir que la moitié d'une ligne est plus petite que la ligne entière? A l'égard des définitions, quelque nécessaires qu'elles soient dans un pareil ouvrage, il nous paroît peu philosophique & peu conforme à la marche naturelle de l'esprit de les présenter d'abord brusquement & sans une espece d'analyse; de dire, par exemple, *la surface est l'extrémité d'un corps, laquelle n'a aucune profondeur*. Il vaut mieux considérer d'abord le corps tel qu'il est, & montrer comment par des abstractions successives on en vient à le regarder comme simplement étendu & figuré, & par de nouvelles abstractions à y considérer successivement la surface, la ligne, & le point. Ajoutons ici qu'il se trouve des occasions, sinon dans des élémens, au-moins dans un cours complet de *Géométrie*, où certaines définitions ne peuvent être bien placées qu'après l'analyse de leur objet. Croit-on, par exemple, qu'une simple définition de l'Algebre en donnera l'idée à celui qui ignore cette science? Il seroit donc à-propos de commencer un traité d'Algebre par expliquer clairement la marche, suivant laquelle l'esprit est parvenu ou peut parvenir à en trouver les règles; & on finiroit ainsi l'ouvrage, *la science que nous venons d'enseigner est ce qu'on appelle Algebre*. Il en est de même de l'application de l'Algebre à la *Géométrie*, & du calcul différentiel & intégral, dont on ne peut bien saisir la vraie définition, qu'après en avoir compris la métaphysique & l'usage.

Revenons aux élémens de *Géométrie*. Un inconvénient peut-être plus grand que celui de s'écarter de la rigueur exacte que nous y recommandons, seroit l'entreprise chimérique de vouloir y chercher une rigueur imaginaire. Il faut y supposer l'étendue telle que tous les hommes la conçoivent, sans se mettre en peine des difficultés des sophistes sur l'idée que nous nous en formons, comme on suppose en mécanique le mouvement, sans répondre aux objections de Zenon d'Elée. Il faut supposer par abstraction les surfaces planes & les lignes droites, sans se mettre en peine d'en prouver l'existence, & ne pas imiter un géomètre moderne, qui par la seule idée d'un fil tendu croit pouvoir démontrer les propriétés de la ligne droite, indépendamment du plan, & qui ne se permet pas cette hypothèse, qu'on peut imaginer une ligne droite menée d'un point à un autre sur une surface plane; comme si l'idée d'un fil tendu, pour représenter une ligne droite, étoit plus simple & plus rigoureuse que l'hypothèse en question; ou plutôt comme si cette idée n'avoit pas l'inconvénient de représenter par une image physique grossière & imparfaite une hypothèse abstraite & mathématique.

Géométrie transcendante ou des courbes. Cette *Géométrie* suppose le calcul algébrique. *Voyez ALGÈBRE & MATHÉMATIQUES.* On doit la commencer par la solution des problèmes du second degré au moyen de la ligne droite & du cercle; & cette théorie peut produire beaucoup de remarques importantes & curieuses sur les racines positives & négatives, sur la position des lignes qui les expriment, sur les différentes solutions dont un problème est susceptible. *Voyez au mot EQUATION* la plupart de ces remarques, qui ne se trouvent pas dans les traités de *Géométrie* ordinaires; *voyez aussi RACINE.* On passera de-là aux sections coniques; la meilleure manière & la plus courte de les traiter dans un ouvrage de *Géométrie* (qui ne se borne pas à cette seule matière), est, ce me semble, d'employer la méthode analytique que nous avons

indiquée à la fin de l'article CONIQUE, de les regarder comme des courbes du premier genre ou lignes du second ordre, & de les diviser en espèces, suivant ce qui en a été dit à l'article cité & au mot COURBE. Quand on aura trouvé l'équation la plus simple de la parabole, celle de l'ellipse, & celle de l'hyperbole, on fera voir ensuite très-aisément que ces courbes s'engendrent dans le cone, & de quelle manière elles s'y engendrent. Cette formation des sections coniques dans le cone seroit peut-être la manière dont on devroit les envisager d'abord, si on se bornoit à faire un traité de ces courbes; mais elles doivent entrer dans un cours de *Géométrie* sous un point de vue plus général. On terminera le traité des sections coniques par la solution des problèmes du troisième & du quatrième degré, au moyen de ces courbes; sur quoi voyez CONSTRUCTION & EQUATION.

La théorie des sections coniques doit être précédée d'un traité, qui contiendra les principes généraux de l'application de l'Algebre aux lignes courbes. Voyez COURBE. Ces principes généraux consisteront, 1°. à expliquer comment on représente par une équation le rapport des abscisses aux ordonnées; 2°. comment la résolution de cette équation fait connaître le cours de la courbe, ses différentes branches & ses asymptotes; 3°. à donner la manière de trouver par le calcul différentiel les tangentes & les points de *maximum* & de *minimum*; 4°. à enseigner comment on trouve l'aire des courbes par le calcul intégral: par conséquent ce traité contiendra les règles du calcul différentiel & intégral, au-moins celles qui peuvent être utiles pour abréger un traité des sections coniques. Quelques géomètres se récrieront peut-être ici sur l'emploi que nous voulons faire de ces calculs dans une matière où l'on peut s'en passer; mais nous les renverrons à ce que nous avons dit sur ce sujet au mot ELLIPSE, pag. 57 & 58. du tome V. Nous y avons fait voir par des exemples combien ces calculs sont commodes pour abréger les démonstrations & les solutions, & pour réduire à quelques lignes ce qui autrement occuperoit des volumes. Nous avons d'ailleurs donné au mot DIFFÉRENTIEL la métaphysique très-simple & très-lumineuse des nouveaux calculs; & quand on aura bien expliqué cette métaphysique, ainsi que celle de l'infini géométrique (voyez INFINI), on pourra se servir des termes d'*infinitement petit* & d'*infini*, pour abréger les expressions & les démonstrations.

En traitant de l'application de l'Algebre aux courbes, on ne les représente guère que par l'équation entre les coordonnées parallèles; mais il est encore d'autres formes, quoique moins usitées, à donner à leur équation. On peut la supposer, par exemple, entre les rayons de la courbe qui partent d'un centre, & les abscisses ou les ordonnées correspondantes; comme aussi entre ces rayons, & la tangente, le sinus ou la sécante de l'angle qu'ils forment avec les abscisses ou les ordonnées; on en voit des exemples au mot ELLIPSE. Toutes ces équations dans les courbes géométriques sont finies & algébriques; mais il en est quelquefois qui se présentent ou qui peuvent se présenter sous une forme différentielle; ce sont celles, par exemple, dans lesquelles un des membres est la différentielle de l'angle formé par le rayon & l'abscisse, & l'autre est une différentielle de quelque fonction de l'abscisse ou du rayon, réduisible à un arc de cercle. Par exemple, si j'avois cette équation $dz = \frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$, z étant l'angle entre le rayon & l'abscisse, x le rayon, & a la valeur du rayon quand $z = 0$, il est évident que la courbe est géométrique.

Car $\frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$ est la différentielle d'un angle dont le cosinus est x , & le rayon a (voyez COSINUS); donc $\frac{x}{a} = \cosinus z$; or, si on nomme u & y les abscisses & ordonnées rectangulaires, on aura $uu + yy = xx$; $x = \sqrt{uu + yy}$; & $\cosinus z = \frac{u}{\sqrt{uu + yy}}$. C'est pourquoi l'équation différentielle $dz = \frac{-dx}{\sqrt{aa-xx}}$, qui paroît ne pouvoir être intégrée que par des arcs de cercle, donnera l'équation en coordonnées rectangulaires $\sqrt{uu + yy} = \frac{au}{\sqrt{uu + yy}}$, qui est l'équation d'un cercle dont les coordonnées ont leur origine à la circonférence. Il en est de même de plusieurs autres cas semblables.

Ces sortes d'équations méritent qu'on en fasse une mention expresse dans la *Géométrie* transcendante, d'autant qu'elles sont très-utiles dans la théorie des *trajectoires* ou courbes décrites par des projectiles, voyez TRAJECTOIRE, & par conséquent dans la théorie des orbites des planètes, voyez ELLIPSE, KEPLER (loi de), PLANETE, & ORBITE. Voyez aussi dans les *mém. de l'acad. des Sciences pour l'année 1710. un mémoire* de M. Bernoulli sur ce dernier sujet.

Les sections coniques achevées, on passera aux courbes d'un genre supérieur; on donnera d'abord la théorie des points multiples, des points d'inflexion, des points de rebroussement & de serpentement. Voyez POINT MULTIPLE, INFLEXION, REBROUSSEMENT, SERPENTEMENT, &c. Ces théories sont fondées en partie sur le calcul algébrique simple, en partie & presque en entier sur le calcul différentiel; ce n'est pas que ce dernier calcul y soit absolument nécessaire; mais, quoi qu'on en puisse dire, il abrège & facilite extrêmement toute cette théorie. On n'oubliera pas la théorie si belle & si simple des développées & des caustiques. Voyez DÉVELOPPÉE, CAUSTIQUE, OSCULATEUR, &c. Nous ne pouvons & nous ne faisons qu'indiquer ici ces différens objets, dont plusieurs ont déjà été traités dans l'Encyclopédie, & les autres le seront à leurs articles particuliers. Voyez TANGENTE, MAXIMUM, &c. On entrera ensuite dans le détail des courbes des différens ordres, dont on donnera les classes, les espèces, & les propriétés principales. Voyez COURBE. A l'égard de la quadrature & de la rectification de ces sortes de courbes, & même de la rectification des sections coniques, on la remettra à la *Géométrie sublime*.

Au reste, en traitant les courbes géométriques, on pourra s'étendre un peu plus particulièrement sur les plus connues, comme le *folium* de Descartes, la *conchoïde*, la *cissoïde*, &c. Voyez ces mots.

Les courbes mécaniques suivront les géométriques. On traitera d'abord des courbes exponentielles, qui sont comme une espèce moyenne entre les courbes géométriques & les mécaniques. Voyez EXPONENTIEL. Ensuite, après avoir donné les principes généraux de la construction des courbes mécaniques, au moyen de leur équation différentielle & de la quadrature des courbes (voyez CONSTRUCTION), on entrera dans le détail des principales & des plus connues, de la *spirale*, de la *quadratrice*, de la *cyloïde*, de la *trochoïde*, &c. Voyez ces mots.

Telles sont à-peu-près les matières que doit contenir un traité de *Géométrie* transcendante; nous ne faisons que les indiquer, & que marquer, pour ainsi dire, les masses principales: Un géomètre intelligent saura trouver de lui-même, & à l'aide des différens articles de ce Dictionnaire, les parties qui doivent composer chacune de ces masses.

Géométrie sublime. Après le plan que nous avons tracé pour la *Géométrie* transcendante, on voit que le calcul différentiel & les

usages y sont presque épuisés; il ne reste plus à la *Géométrie sublime* que le calcul intégral, & son application à la quadrature & à la rectification des courbes. Ce calcul fera donc la matière principale & presque unique de la *Géométrie sublime*. Sur la manière dont on doit le traiter, voyez INTÉGRAL.

Nous terminerons cet article par quelques réflexions générales. On a vu au mot APPLICATION des observations sur l'usage de l'analyse & de la synthèse en *Géométrie*. On nous a fait sur cet article quelques questions qui donneront lieu aux remarques suivantes.

1°. Le calcul algébrique ne doit point être appliqué aux propositions de la *géométrie* élémentaire, par la raison qu'il ne faut employer ce calcul que pour faciliter les démonstrations, & qu'il ne paroît pas y avoir dans la *géométrie* élémentaire aucune démonstration qui puisse réellement être facilitée par ce calcul. Nous exceptons néanmoins de cette règle la solution des problèmes du second degré par le moyen de la ligne droite & du cercle (supposé qu'on veuille regarder ces problèmes comme appartenant à la *géométrie* élémentaire, & non comme le passage de la *géométrie* élémentaire à la transcendante); car le calcul algébrique simplifie extrêmement la solution des questions de ce genre, & il abrège même les démonstrations. Pour s'en convaincre, il suffira de jeter les yeux sur quelques-uns des problèmes du second degré qui sont résolus dans l'*application de l'Algebre à la Géométrie* de M. Guisnée. Après avoir mis un problème en équation, l'auteur tire de cette équation la construction nécessaire pour satisfaire à l'équation trouvée; & ensuite il démontre synthétiquement & à la manière des anciens, que la construction qu'il a employée résout en effet le problème. Or la plupart de ces démonstrations synthétiques sont assez compliquées & fort inutiles, si ce n'est pour exercer l'esprit; car il suffit de faire voir que la construction satisfait à la solution de l'équation finale, pour prouver qu'elle donne la solution du problème.

2°. Nous croyons qu'il est ridicule de démontrer par la synthèse ce qui peut être traité plus simplement & plus facilement par l'analyse, comme les propriétés des courbes, leurs tangentes, leurs points d'inflexion, leurs asymptotes, leurs branches, leur rectification, & leur quadrature. Les propriétés de la spirale que les plus grands mathématiciens ont eu tant de peine à suivre dans Archimède, peuvent aujourd'hui se démontrer d'un trait de plume. N'y a-t-il donc pas en *Géométrie* assez de choses à apprendre, assez de difficultés à vaincre, assez de découvertes à faire, pour ne pas user toutes les forces de son esprit sur les connaissances qu'on peut y acquérir à moins de frais? D'ailleurs combien de recherches géométriques auxquelles la seule analyse peut atteindre? Les Anglois, grands partisans de la synthèse, sur la foi de Newton qui la louoit, & qui s'en feroit pour cacher sa route, en employant l'analyse pour se conduire lui-même; les Anglois, dis-je, semblent par cette raison n'avoir pas fait en *Géométrie*, depuis ce grand homme, tous les progrès qu'on auroit pu attendre d'eux. C'est à d'autres nations, aux François & aux Allemands, & sur tout aux premiers, qu'on est redevable des nouvelles recherches sur le système du monde, sur la figure de la terre, sur la théorie de la lune, sur la précession des équinoxes, qui ont prodigieusement

étendu l'Astronomie-physique. Qu'on essaye d'employer la synthèse à ces recherches, on sentira combien elle en est incapable. Ce n'est qu'à des géomètres médiocres qu'il appartient de rabaisser l'analyse, comme il n'appartient de décrire un art qu'à ceux qui l'ignorent. On trouve une espèce de consolation à taxer d'inutilité ce qu'on ne fait pas. Nous avons, il est vrai, exposé ailleurs quelques inconvénients de l'Algebre. Voyez le mot EQUATION, page 850. tome V. Si la synthèse peut lever ces inconvénients dans les cas où ils ont lieu, nous conviendrons qu'on devrait préférer la synthèse à l'analyse, du moins en ces cas-là; mais nous doutons, pour ne rien dire de plus, que la synthèse ait cet avantage; & ceux qui penseroient autrement, nous obligeroient de nous défabuser.

3°. Il y a cette différence en Mathématique entre l'Algebre & l'Analyse, que l'Algebre est la science du calcul des grandeurs en général, & que l'Analyse est le moyen d'employer l'Algebre à la solution des problèmes. Je parle ici de l'*analyse mathématique*; l'emploi qu'elle fait de l'Algebre pour trouver les inconnues au moyen des connues, est ce qui la distingue de l'*analyse logique*, qui n'est autre chose en général que l'art de découvrir ce qu'on ne connoît pas par le moyen de ce qu'on connoît. Les anciens géomètres avoient sans doute dans leurs recherches une espèce d'analyse; mais ce n'étoit proprement que l'analyse logique. Tout algebriste s'en sert pour commencer le calcul; mais ensuite le secours de l'Algebre facilite extrêmement l'usage & l'application de cette analyse à la solution des problèmes. Ainsi, quand nous avons dit au mot ANALYSE, que l'analyse *mathématique* enseigne à résoudre les problèmes, en les réduisant à des équations, nous croyons avoir donné une définition très-juste. Ces derniers mots sont le caractère essentiel qui distingue l'analyse mathématique de toute autre; & nous n'avons fait d'ailleurs que nous conformer en cela au langage universellement reçu aujourd'hui par tous les géomètres algebristes.

4°. On peut appeler l'Algebre *géométrie symbolique*, à cause des symboles dont l'Algebre se sert dans la solution des problèmes; cependant le nom de *géométrie métaphysique* qu'on a donnée à l'Algebre (voyez ALGEBRE), paroît lui être du-moins aussi convenable; parce que le propre de la Métaphysique est de généraliser les idées, & que non seulement l'Algebre exprime les objets de la *Géométrie* par des caractères généraux, mais qu'elle peut faciliter l'application de la *Géométrie* à d'autres objets. En effet on peut, par exemple, en Mécanique, représenter le rapport des parties du tems par le rapport des parties d'une ligne, & le mouvement d'un corps par l'équation d'une courbe, dont les abscisses représentent les tems, & les ordonnées les vitesses correspondantes. La *Géométrie*, sur-tout lorsqu'elle est aidée de l'Algebre, est donc applicable à toutes les autres parties des Mathématiques, puisqu'en Mathématique il n'est jamais question d'autre chose, que de comparer des grandeurs entr'elles; & ce n'est pas sans raison que quelques géomètres philosophes ont défini la *Géométrie* la science de la grandeur en général, entant qu'elle est représentée ou qu'elle peut l'être par des lignes, des surfaces, & des solides.

Sur l'application de la *Géométrie* aux différentes sciences, voyez APPLICATION, MÉCANIQUE, OPTIQUE, PHYSIQUE, PHYSICO-MATHÉMATIQUE, &c. (O)