

ABRÉGÉ DE GÉOMÉTRIE D'APRÈS ÉLIE CARTAN

Raphaël V. ALEXANDRE*

Notes de travail pour la thèse de l'auteur.

17 février 2020

SOMMAIRE

I	Groupe de Lie et espace homogène	3
I.1	Groupe et algèbre de Lie	3
I.2	Espace homogène	8
I.3	Exemples d'espaces homogènes	13
II	Variété à forme de Cartan et troisième théorème de Lie	15
II.1	Variété à forme de Cartan	16
II.2	Troisième théorème de Lie	19
III	Espace généralisé	21
III.1	Espace généralisé localement homogène	25
III.2	Espace généralisé non holonome	28
IV	Dérivation covariante	34
IV.1	Connexion affine	34
IV.2	Connexion horizontale	39
V	Principe de jauge	41
VI	Annexe — Formes à valeurs dans une algèbre de Lie	48

Ce premier chapitre d'éléments de géométrie tente de donner un exposé court de la géométrie de Cartan. Le premier mémoire de Cartan sur les espaces généralisés date de 1923¹. Il est étonnant de constater que près d'un siècle plus tard, les espaces généralisés de Cartan restent une construction en quelque sorte réservée aux initiés. Pourtant c'est peut-être là l'une des plus belles formulations qui rend compte d'un très grand nombre de situations géométriques différentes.

Dans la littérature, l'ouvrage de MILNOR² est de ceux qui proposent un exposé court — mais merveilleusement bien écrit — de géométrie riemannienne. Son sujet n'est finalement pas très différent du notre. Le passage conceptuel de la géométrie riemannienne à la géométrie de Cartan est déjà existante : il a été réalisé par Cartan lui-même.

*Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Sorbonne Université, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cédex, France.

1. [Car23] CARTAN, « Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) », 1923.

2. [Mil63] MILNOR, *Morse theory*, 1963.

On sait, depuis M. F. KLEIN (Programme d'Erlangen) et S. LIE, le rôle important joué par la théorie des groupes dans la géométrie. H. POINCARÉ a popularisé dans le grand public scientifique cette idée fondamentale que la notion de groupe est à la base des premières spéculations géométriques. La géométrie élémentaire est au fond la théorie des invariants d'un certain groupe, le groupe des déplacements euclidiens; elle a en effet pour but l'étude des propriétés des figures qui se conservent par un déplacement arbitraire; dire que tous les déplacements forment un groupe, c'est justement exprimer en langage précis l'axiome d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.

La géométrie projective a de même pour objet l'étude des propriétés des figures qui se conservent par le groupe des transformations homographiques, et on peut également assigner à la géométrie affine, à la géométrie conforme ou anallagmatique, etc., un groupe correspondant. Inversement tout groupe continu donne naissance à une discipline géométrique autonome.

Dans chacune de ces géométries on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe *fondamental*; c'est ainsi qu'on est arrivé à dire: «l'espace euclidien», «l'espace affine», etc., au lieu de «l'espace dans lequel on n'étudie que les propriétés des figures invariantes par le groupe euclidien, le groupe affine, etc.» Chacun de ces espaces est *homogène*, en ce sens que ses propriétés restent inaltérées par une transformation du groupe fondamental correspondant.

Plusieurs années avant le Programme d'Erlangen, B. RIEMANN avait introduit, dans son mémoire célèbre: «*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*», des espaces *non homogènes* au sens qui vient d'être donné à cette expression. Dans ces espaces le carré de la distance de deux points infiniment voisins était défini par une forme différentielle, jusqu'à un certain point arbitraire, mais qu'en fait, on a toujours supposée quadratique. Ces espaces ont fait l'objet de nombreux et importants travaux, principalement en Allemagne et en Italie. Mais ils ont surtout pris une importance considérable depuis que M. EINSTEIN, par la théorie de la relativité généralisée, a essayé, en identifiant notre Univers à un espace de Riemann, de réunir en une seule et même théorie la gravitation, l'optique et l'électromagnétisme. Le mouvement d'idées auquel cette théorie a donné naissance a conduit, par des généralisations importantes, à des espaces nouveaux; il suffira de citer les espaces de M. H. WEYL et les espaces de M. EDDINGTON. Quel rôle la notion de groupe joue-t-elle, ou plutôt doit-elle jouer, dans ce champ nouveau de la Géométrie; est-il possible de faire rentrer dans le cadre, suffisamment élargi, du programme d'Erlangen toutes les géométries nouvelles et une infinité d'autres, c'est ce que je propose d'examiner³.

En résumé, dans les généralisations précédentes, l'idée directrice est la suivante. Dans un espace holonome au sens de M. F. Klein, tout est commandé par le groupe fondamental et ses différentes opérations. Ce sont ces opérations qui font de l'espace un tout organique. Dans les espaces non holonomes, ce sont encore les opérations du groupe qui sont un principe d'organisation, mais uniquement de proche en proche. C'est précisément en analysant ce que cette organisation a d'incomplet que nous allons arriver au rôle tout à fait nouveau que va jouer encore la notion de groupe dans les géométries nouvelles⁴.

Le point de vue de Cartan — qui est assez bien retranscrit par SHARPE⁵ — consiste à dire qu'un espace de Klein — pour nous, ce seront les espaces homogènes — sont les modèles géométriques *plats*. Un *espace généralisé* — c'est le terme de Cartan — est un espace où en chaque point un espace de Klein est prescrit mais où une courbure non nulle est possible. Ce passage du plat au généralisé, est comparable — et devrait être comparé — avec le passage de la géométrie de Lorentz à celle d'Einstein, ou en d'autres termes, de la relativité restreinte à la relativité générale.

La Relativité généralisée jeta dans la Physique et la Philosophie l'antagonisme qui existait entre les deux principes directeurs de la Géométrie, celui de Riemann et celui de Klein. Les espaces-temps de la mécanique classique et de la relativité restreinte sont du type de Klein, celui de la Relativité généralisée est du type de Riemann⁶.

3. [Car24a] CARTAN, « La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle », 1924.

4. *Ibid.* p. 9-10.

5. [Sha97] SHARPE, *Differential geometry*, 1997.

6. [Car27] CARTAN, « La théorie des groupes et la géométrie », 1927.

Ce chapitre propose d'introduire les groupes et algèbres de Lie en mettant l'accent sur leur géométrie à la façon de Cartan, puis d'introduire et de comparer la notion de connexion de Cartan avec celle de connexion affine. Cette comparaison se fera en introduisant les espaces généralisés de Cartan, qui sont à comparer avec les espaces riemanniens classiques.

En raison d'une littérature déjà foisonnante autour des groupes et algèbres de Lie (par exemple l'ouvrage très complet de KNAPP⁷, qui dépasse par ailleurs le millier de pages), un certain nombre de résultats, mais finalement assez réduit, ne sont pas démontrés. Aussi, la plupart des résultats de géométrie différentielle classiques ne sont pas prouvés. Nous donnerons un certain nombre de repères bibliographiques.

I — GROUPE DE LIE ET ESPACE HOMOGÈNE

Cette première section donne la construction des espaces que nous considérerons comme les modèles plats. Les groupes de Lie en sont des exemples élémentaires : ce sont des espaces avec une notion de translation. Cependant, la plupart des exemples communs viennent de la classe des espaces homogènes : ce sont des espaces sur lequel un groupe de Lie agit transitivement.

I.1 GROUPE ET ALGÈBRE DE LIE

La donnée d'un groupe de Lie G est celle d'une information géométrique (c'est une variété lisse) et d'une information algébrique (c'est un groupe). En réalité, l'apport de l'algèbre est peut-être à comprendre derrière l'étude des algèbres de Lie. À partir de G , nous définissons son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$, comme étant l'ensemble de ses champs de vecteurs invariants par translations à gauche. Nous désignerons par L_g la translation à gauche $L_g(x) = gx$.

DÉFINITION I.1 Étant donné un corps K , une algèbre $\mathfrak{g}$ sur K est une algèbre de Lie si sa multiplication (notée $xy \mapsto [x, y]$) est une fonction bilinéaire alternée et vérifie $[x, x] = 0$ ainsi que l'identité de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [[x, y], z] + [y, [x, z]] = 0. \quad (1)$$

Le produit est aussi appelé crochet de Lie⁸.

Lorsque G est un groupe de Lie, le crochet de Lie de la variété sous-jacente définit sur l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche une application de produit tel que requis par la définition qui précède.

DÉFINITION I.2 Soit M une variété lisse. Pour tous champs de vecteurs X, Y de M , le crochet de Lie $[X, Y]$ est l'unique champ de vecteurs tel que la dérivation d'une fonction $f \in C^\infty(L)$ soit

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f). \quad (2)$$

Ce crochet sur un groupe de Lie G définit bien une application bilinéaire alternée sur les champs de vecteurs invariants à gauche (car cette propriété de dérivation est elle-même invariante à gauche).

Nous verrons par la suite que la notion d'algèbre de Lie est très adaptée pour exprimer beaucoup des propriétés géométriques qui nous intéresseront. Cela provient de la remarque suivante. En général, sur une variété M , un ensemble de champs de vecteurs n'a pas de raison d'être un ensemble de champs de vecteurs invariants à gauche pour une structure de groupe sur M , puisque cette structure de groupe n'a même pas de raison d'exister. En revanche, certaines propriétés algébriques sont toujours testables sur M , et elles définissent des propriétés géométriques.

7. [Kna02] KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, 2002.

8. [Bou71] BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre I: Algèbres de Lie*, 1971.

Par exemple, pour une connexion affine ∇ , la torsion teste si cette connexion définit un produit donnant le crochet de Lie : $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, et la courbure teste l'identité de Jacobi de ce crochet potentiel : $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$. L'une des conclusions de notre chapitre sera la suivante : à partir d'un espace généralisé strict M — ce qui signifiera que nous donnerons à la variété une connexion de Cartan stricte — modelé sur l'espace affine, nous pouvons construire une connexion affine ∇ . Sa courbure et sa torsion sont nulles, si, et seulement si, celles de la connexion de Cartan le sont aussi. Nous montrerons, en toute généralité, que la courbure d'une connexion de Cartan stricte est nulle si, et seulement si, M est localement isomorphe à l'espace homogène sous-jacent.

Ainsi, nous pourrions généraliser à des objets géométriques bien plus généraux le phénomène habituel suivant : une connexion métrique est de torsion et de courbure nulles si, et seulement si, la variété est localement euclidienne.

Ce chapitre consiste entre autres à donner sens à la remarque précédente, et nous allons devoir expliciter comment penser sur une variété — qui n'est pas un groupe — un certain ensemble de champs de vecteurs invariants par translations. Être invariant par translations consiste à dire qu'un observateur qui voyagerait le long d'une trajectoire de translation, n'aurait pas l'impression que le vecteur du champ tangent en sa position serait en train de changer pendant son voyage.

Ce que nous décrivons n'est pas nouveau, il s'agit de la notion de connexion ou — dans sa version géométrique — de transport parallèle. Sur un groupe de Lie G , il existe une connexion naturelle, provenant des translations à gauche.

DÉFINITION I.3 (Forme de Maurer-Cartan) *Soit G un groupe de Lie. Sa forme de Maurer-Cartan est la 1-forme ω_G à valeurs dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie par*

$$\forall v_p \in T_p G, \omega_G(v_p) = (L_p)_*^{-1} v_p. \quad (3)$$

De façon équivalente, un champ de vecteurs X sur G est invariant à gauche si, et seulement si, $\omega_G(X)$ est constant. Ainsi, la forme de Maurer-Cartan définit un parallélisme, et G est naturellement parallélisable — son fibré tangent est trivial.

Cette forme ω_G n'est pas quelconque dans l'ensemble des 1-formes à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et la question : « À quelle condition une 1-forme à valeurs dans une algèbre de Lie réelle est-elle une forme de Maurer-Cartan ? » est l'une des motivations historiques. En réalité, l'approche de Cartan avec le théorème d'Ado permet une réponse géométrique complète au troisième théorème de Lie : la donnée d'une algèbre de Lie définit un unique groupe de Lie simplement connexe ayant cette algèbre pour algèbre de Lie.

La construction va être la suivante. Il s'avère que ω_G vérifie une certaine *équation de structure*¹⁰. Cette équation peut être vue comme une propriété d'intégrabilité locale. Et il s'avère, qu'en effet, toute forme vérifiant cette équation de structure provient localement d'une forme de Maurer-Cartan. Cela permettra à terme de construire à partir d'une donnée locale la structure de l'unique groupe simplement connexe portant l'algèbre de Lie réelle initiale.

DÉFINITION I.4 *L'équation de structure d'une 1-forme ω à valeurs dans une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ est l'équation*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0. \quad (4)$$

Toute forme de Maurer-Cartan vérifie l'équation de structure. Soit ω_G une forme de Maurer-Cartan. La différentiation de n'importe quelle 1-forme donne

$$d\omega_G(X, Y) = X(\omega_G(Y)) - Y(\omega_G(X)) - \omega_G([X, Y]). \quad (5)$$

9. Sur les formes à valeurs dans une algèbre de Lie, nous pourrions nous reporter la section annexe dédiée.

10. Nous pouvons trouver dans la littérature francophone le terme *équation structurelle*. Le terme que nous avons choisi est celui employé par Cartan et nous a également semblé plus adapté littérairement.

Puisque l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche fournit une base de l'espace tangent, il suffit de regarder ceux-ci. Si X et Y sont invariants à gauche, alors $\omega_G(X)$ et $\omega_G(Y)$ sont constants et les dérivées $X(\omega_G(Y))$ et $Y(\omega_G(X))$ sont donc nulles. Puisque X et Y sont invariants à gauche, $[X, Y]$ aussi et donc $\omega_G([X, Y]) = [\omega_G(X), \omega_G(Y)]$. La preuve est conclue du fait que $[\omega_G(X), \omega_G(Y)] = \frac{1}{2}[\omega_G \wedge \omega_G](X, Y)$.

À présent nous allons expliciter le passage de l'équation de structure à une propriété d'intégrabilité locale. De la théorie de l'intégration des distributions¹¹ nous retiendrons le fait suivant.

THÉORÈME I.5 *Soit ω une 1-forme d'une variété lisse M à valeurs dans un espace vectoriel V . Soit $W \subset V$ un sous-espace vectoriel & supposons que $\dim \omega_x^{-1}(W)$ est constant par rapport à x . Alors $\omega^{-1}(W)$ définit une distribution & elle est intégrable si, & seulement si, $d\omega(X, Y) \in W$ dès que $\omega(X) \in W$ & $\omega(Y) \in W$.*

En particulier, si ω est une 1-forme vérifiant l'équation de structure pour une algèbre de Lie quelconque $\mathfrak{g}$, alors ω définit une distribution intégrable pour toute sous-algèbre de Lie $W \subset \mathfrak{g}$. En effet, l'équation de structure montre que si $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ alors $d\omega(X, Y) = 0$.

Le fait qu'une distribution Δ de dimension k soit intégrable signifie qu'il existe localement des feuilles d'intégration¹².

THÉORÈME I.6 (Intégrabilité de Frobenius) *Soit $\Delta \subset TM$ une distribution de dimension k . Si elle est intégrable, alors pour tout $p \in M$ il existe une carte locale (U, x) telle que les équations*

$$x_{k+1} = a_{k+1}, \dots, x_n = a_n, \quad (6)$$

pour $a_{k+1}, \dots, a_n$ petits, définissent des feuilles d'intégration locales de Δ .

À présent nous pouvons étudier la question formulée précédemment. Considérons M une variété lisse et G un groupe de Lie muni de sa forme de Maurer-Cartan ω_G .

DÉFINITION I.7 *Pour toute fonction lisse $f: M \rightarrow G$, nous définissons la dérivée de Darboux de f comme étant la 1-forme*

$$\omega_f = f^* \omega_G = \omega_G \circ f_*. \quad (7)$$

Cette dérivée de Darboux est encore une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Par naturalité du tiré-en-arrière, ω_f vérifie encore l'équation de structure. La question posée précédemment consiste à étudier la réciproque de cette propriété.

Bien sûr, nous pouvons commencer par remarquer que la donnée d'une dérivée de Darboux ω_f ne définit f qu'à translation à gauche près, puisque $L_g f$ aura la même dérivée de Darboux que f ¹³.

THÉORÈME I.8 (Intégration locale des dérivées de Darboux) *Soit G un groupe de Lie & soit M une variété lisse. Soit ω une 1-forme de M à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Alors ω vérifie l'équation de structure si, & seulement si, ω est en tout point localement la dérivée de Darboux d'une fonction lisse $f: U \rightarrow G$. La fonction f est unique dès qu'une condition initiale $f(p)$ est donnée (avec $p \in U$ quelconque).*

Nous démontrerons ce résultat sous un jour plus général dans la section suivante (II.3, p. 17). Il s'agit essentiellement d'intégrer localement la distribution $\pi_M^* \omega - \pi_G^* \omega_G$ sur $M \times G$.

COROLLAIRE I.9 (Application développante) *Soit ω une 1-forme de l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Alors il existe une unique fonction lisse — appelée développante de ω — $D_\omega: [0, 1] \rightarrow G$ avec $D_\omega(0)$ prescrite comme condition initiale.*

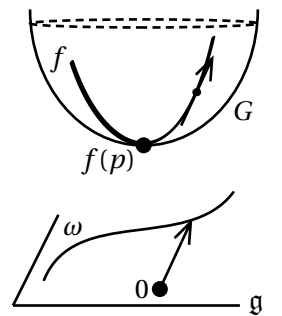


FIGURE 1 : Intégration locale d'une dérivée de Darboux.

11. [Sha97] SHARPE, *Differential geometry*, 1997.

12. [Spi99] SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*, 1999.

13. Et réciproquement, si $f^* \omega_G - h^* \omega_G = 0$, alors puisque ω_G est un isomorphisme sur chaque fibre du fibré tangent, cela montre que $f_* - h_* = 0$ et donc que $f h^{-1}$ est constante dans G .

PREUVE Évidemment, puisque l'intervalle $[0, 1]$ est de dimension une, toute 1-forme vérifie l'équation de structure. De plus, par compacité, nous pouvons recouvrir $[0, 1]$ par un nombre fini d'ouverts d'intégration et le recollement des intégrales locales se fait sans heurt sur leurs intersections par translation à gauche. $\boxtimes$

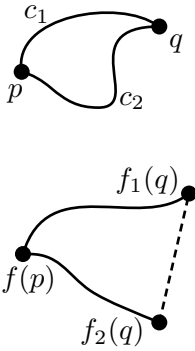
Fixons un point de G depuis lequel nous développons tous les chemins. Le mécanisme précédent permet de définir une première application développante

$$D: \Lambda(M)^* \Omega^1(M, \mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda(G) \quad (8)$$

où $\Lambda(M)^* \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ désigne les tirés-en-arrière d'une 1-forme ω définie sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ par un chemin $c: [0, 1] \rightarrow M$. En effet, $c^* \omega$ est une 1-forme sur $[0, 1]$ et définit donc une application $f: [0, 1] \rightarrow G$ qui peut-être vue comme un chemin dans G .

Cette application développante peut être spécialisée en choisissant un élément de $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$, c'est-à-dire en choisissant une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Cette 1-forme ne vérifie pas nécessairement l'équation de structure. C'est donc une application développante relativement générale qui peut-être définie. Elle n'est intéressante que si ω est injective sur chaque fibre du fibré tangent TM . Nous verrons qu'une telle forme peut être donnée par une *connexion de Cartan*.

Le fait que toutes les 1-formes définies sur $[0, 1]$ soient intégrables a été absolument crucial. Si nous souhaitons développer des parties plus grandes de M , il faut pour cela choisir une 1-forme dans $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ qui vérifie l'équation de structure sur de telles parties plus grosses que des chemins. Si nous choisissons par exemple la classe des ouverts de M , alors nous obtiendrons la développante d'Ehresmann-Thurston.



Le passage du local au global dans l'intégration des formes de Darboux, est essentiellement topologique. Si nous considérons ω une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sur M qui vérifie l'équation de structure, alors — dans un esprit d'analyse-synthèse — l'hypothèse $\omega = f^* \omega_G$ implique en particulier que le développement de n'importe quel chemin ne doit pas dépendre de la classe d'homotopie de celui-ci (puisque f est bien définie sur M , indépendamment du chemin choisi pour relier un point base à un autre point).

Nous cherchons donc, à travers ce raisonnement, à déduire de la développante D précédemment définie une nouvelle application, que nous dirons *de point d'arrivée de la développante*,

$$E: \widetilde{M}^* \Omega_C^1(M, \mathfrak{g}) \rightarrow G. \quad (9)$$

FIGURE 2: Développement le long de deux chemins.

Ici, $\Omega_C^1(M, \mathfrak{g})$ désigne l'ensemble des 1-formes de $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ qui vérifient l'équation de structure. Nous identifions également le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M à l'ensemble des chemins basés en un même point base préalablement fixé et modulo la relation d'équivalence donnée par les homotopies à extrémités fixées. La flèche E devrait consister à prendre D sur un représentant de l'élément choisi dans $\widetilde{M}^* \Omega_C^1(M, \mathfrak{g})$ et à considérer le point final de l'application obtenue dans $\Lambda(G)$. Cette procédure est permise par le résultat suivant ¹⁴.

PROPOSITION I.10 *Soit M une variété lisse & σ_0, σ_1 deux chemins à extrémités égales & homotopes par une homotopie relativement à ces extrémités. Si ω est une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vérifiant l'équation de structure, alors $D_{\sigma_0}(1) = D_{\sigma_1}(1)$ dès que nous avons initialement $D_{\sigma_0}(0) = D_{\sigma_1}(0)$.*

PREUVE La preuve consiste à remarquer que si H est une telle homotopie, alors $H^* \omega$ vérifie encore l'équation de structure sur $[0, 1]^2$, et nous pouvons développer $H^* \omega$ globalement de la même façon que nous avons développé globalement un chemin. $\boxtimes$

Remarquons ici qu'il a été nécessaire dans la preuve de considérer $\Omega_C^1(M, \mathfrak{g})$ et non $\Omega^1(M, \mathfrak{g})$ puisqu'il a été nécessaire que $H^* \omega$ vérifie également l'équation de structure.

¹⁴. Voir [Sha97, p. 121].

À présent, nous pouvons définir l'*homomorphisme de monodromie*, Φ_M , en réduisant l'application E aux seuls lacets :

$$\Phi_M: \pi_1(M)^* \Omega_C^1(M, \mathfrak{g}) \rightarrow G. \quad (10)$$

Classiquement, la définition de ce morphisme est effectuée en ayant fait préalablement le choix d'une forme $\omega \in \Omega_C^1(M, \mathfrak{g})$, de sorte que $\Phi_M: \pi_1(M) \rightarrow G$.

En résumé, cette application développe un élément de $\pi_1(M)$ à travers un représentant et en basant en un même point de G — disons e — et prend le point d'arrivée. Cette construction fonctionne correctement en raison du résultat précédent. Cette application est bien un homomorphisme, et les changements de points bases (dans M et dans G) influent de façon classique sur l'expression de Φ_M . Cette application est la dernière obstruction à l'intégration des dérivées de Darboux. Pour rappel, si $\omega = f^* \omega_G$, alors nécessairement Φ_M est l'application constante égale à e .

THÉORÈME I.11 (Intégration globale des dérivées de Darboux) *Soit ω une 1-forme à valeurs dans une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ sur une variété lisse connexe M . Alors ω est la dérivée de Darboux d'une fonction lisse $f: M \rightarrow G$ si, & seulement si, ω vérifie l'équation de structure & produit un homomorphisme de monodromie trivial.*

PREUVE C'est la réciproque qu'il faut justifier. L'équation de structure étant vérifiée, l'intégration locale fournit des applications $f: U \rightarrow G$ dont il faut parvenir à effectuer le recollement. Fixons $x \in M$ et $g \in G$ de sorte qu'une première intégration locale donne $f(x) = g$. Soit $y \in M$ et γ n'importe quel chemin de x à y . Du fait que l'homomorphisme de monodromie est trivial, la développante de γ dans G donne un point d'arrivée qui ne dépend pas de γ . Cela définira $f(y)$. Maintenant, si $f: V \rightarrow G$ est un développement local en y avec la valeur initiale $f(y)$, alors si $z \in M$, la valeur $f(z)$ ne dépend pas du choix d'un chemin depuis x ou y , puisque la composition d'un chemin depuis y avec un chemin entre x et y donne un chemin depuis x . $\mathbb{X}$

Évidemment, le morphisme de monodromie est automatiquement trivial dès que M est simplement connexe.

COROLLAIRE I.12 *Soit M une variété lisse & ω une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ & vérifiant l'équation de structure. Alors, avec $\pi_1: \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel, $\pi_1^* \omega$ permet de définir une application — appelée développante — $D: \widetilde{M} \rightarrow G$ qui est un difféomorphisme local si ω est un isomorphisme sur chaque fibre du fibré tangent.*

Remarquons que la développante D n'est jamais que l'intégrale globale f précédemment construite pour le couple $(\widetilde{M}, \pi_1^* \omega)$. C'est automatiquement un difféomorphisme local si ω est un isomorphisme sur chaque fibre du fibré tangent car $\omega = D^* \omega_G$ et cette dernière 1-forme est bien un isomorphisme sur chaque fibre de $TG \rightarrow G$. En général, et par ce même raisonnement, D a le même rang que ω .

Nous terminons cette première partie en mentionnant la construction canonique des géodésiques d'un groupe de Lie.

Soit G un groupe de Lie. L'application de flot des champs de vecteurs invariants à gauche est aussi appelée *exponentielle*. En d'autres termes, si $v \in \mathfrak{g}$, alors il existe un unique champ de vecteurs X tel que $\omega_G(X) = v$. L'image $\exp(tv)$ est le flot de la ligne intégrale de ce champ de vecteurs en partant de l'identité. L'application $\exp: U \rightarrow G$ est définie dans un voisinage de l'origine de $\mathfrak{g}$. Elle n'est généralement ni injective ni surjective.

THÉORÈME I.13 (Formule de Campbell-Baker-Hausdorff¹⁵) *Soit G un groupe de Lie analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tous a & b suffisamment proches de 0 dans $\mathfrak{g}$,*

$$\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b + h_2 + h_3 + \dots) \quad (11)$$

avec $h_2 = \frac{1}{2}[a, b]$, & h_n qui est une combinaison linéaire de n crochets de Lie de a & b . L'expression de h_n ne dépendant pas des choix de a & b ou même de G .

15. [Kna02] KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*, 2002.

THÉORÈME I.14 Soit G un groupe de Lie connexe & nilpotent — l'algèbre de Lie de G est elle-même nilpotente — alors l'exponentielle est partout définie, surjective & est un difféomorphisme si G est simplement connexe.

Les lignes intégrales données par $\exp(tv)$, nous les appellerons *géodésiques* en raison du phénomène classique de transport parallèle. Par définition, le vecteur tangent à $\exp(tv)$ est en tout point le transport parallèle de v , et donc correspond à la notion de géodésique classique. Les géodésiques issues d'autres points sont simplement données par $L_g \exp(tv)$. Une définition équivalente est alors la suivante.

DÉFINITION I.15 Une courbe lisse $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ est dite *géodésique* si sa dérivée de Darboux $\gamma^* \omega_G$ est constante.

I.2 ESPACE HOMOGENÈME

Les groupes de Lie fournissent de premiers exemples d'espaces qui ont des géodésiques. Dans le cas des groupes nilpotents, ce sont même des espaces totalement géodésiques. Mais en pratique, les espaces qui nous intéressent sont plus complexes. En effet, si les groupes de Lie sont des espaces pour lesquels des translations sont bien définies et compatibles avec la structure de groupe, les espaces homogènes permettent d'avoir des transformations plus complexes (des rotations par exemple).

Si E est un espace sur lequel agit transitivement un groupe de Lie G , alors en réalité E est difféomorphe à G/H , où H est un sous-groupe fermé : le stabilisateur dans G d'un point de E . En effet, soit $x \in E$ le point pour lequel H est le stabilisateur. Faisons correspondre x à eH dans G/H . Alors pour tout $p \in E$, si g envoie x sur p , alors $geH = gH$ correspond à p . Si g' est une seconde transformation envoyant elle aussi x sur p , alors $g^{-1}g'$ stabilise x et appartient donc à H . Ainsi, $g^{-1}g'eH = eg^{-1}g'H$ et donc (en appliquant g des deux côtés) $g'H = gH$. La correspondance envoyant p sur gH est donc bien définie et ne dépend pas du choix de l'opération g qui envoie x sur p .

DÉFINITION I.16 Un espace homogène est la donnée d'un groupe de Lie G & d'un sous-groupe fermé H . Nous identifions également un espace homogène au quotient G/H univoquement défini dès que G est donné.

Progressivement, nous allons enrichir cette structure. Mais avant, nous devons mentionner la définition en termes de fibrés principaux¹⁶. Naturellement, le couple $(G, G/H)$ est muni d'une application de projection $\pi: G \rightarrow G/H$ qui à g associe gH . Cette projection est celle d'un H -fibré principal à droite.

DÉFINITION I.17 Un H -fibré principal à droite est la donnée d'un fibré $\pi: E \rightarrow B$, où la fibre est isomorphe à H et d'une action lisse à droite libre et propre de H sur E qui préserve les fibres.

Inspectons ce que fournit le regard de l'algèbre de Lie. Le groupe G a son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et de même H a son algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. À moins que H ne soit distingué dans G , il n'y a pas de raison pour que G/H soit un groupe de Lie, et en général ça n'est effectivement pas le cas. Pourtant, nous aimerions pouvoir décrire le fait que

$$T_x G/H = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}. \quad (12)$$

Et, de plus, nous aimerions pouvoir comprendre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

16. Historiquement, le terme *groupe principal* provient d'une traduction de l'allemand *Hauptgruppe* employé notamment par Klein dans son fameux programme. Il s'agissait de désigner le groupe fondamental (le terme *fondamental* est utilisé par Cartan en lieu et place de *principal*; mais nous réservons ce premier aujourd'hui au groupe de Poincaré) qui agissait sur un espace : par exemple le groupe des homographies est le groupe fondamental de l'espace projectif, le groupe des isométries euclidiennes est celui de l'espace euclidien. Ce qui est subtil dans cette discussion historique, c'est que nous manipulons des H -fibrés principaux, dont l'espace total est G , alors que nos prédécesseurs parleraient du groupe fondamental — ou principal — G pour l'espace G/H .

En règle général, cela ne peut pas être possible, car il n'y a pas de choix canonique pour un supplémentaire vectoriel de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Mais une contrainte supplémentaire est la véritable obstruction.

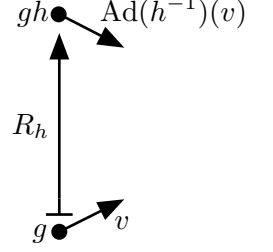
Dans $T_x G/H$, l'action à droite de H — désignée par R_h — stabilise encore x car $eHh = eH$. Mais elle n'est pas nécessairement l'identité sur tout l'espace homogène, et nous nous attendons à ce que les vecteurs tangents ne soient pas laissés fixes. Cependant, l'action de R_h laisse tangents les vecteurs tangents. Elle doit donc préserver l'hypothétique supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

Pour comprendre l'action de R_h sur $\mathfrak{g}$, il nous faut définir l'*application — ou représentation — adjointe*. Si nous considérons le champ de vecteurs invariant à gauche X , $\omega_G(X) = v$, avec $v \in \mathfrak{g}$, alors l'action de $(R_h)_*$ sur X explique l'action de h sur $\mathfrak{g}$. Or,

$$R_h^* \omega_G(X) = \omega_G((R_h)_* X) = \omega_G((R_h)_* (L_g)_* v) \quad (13)$$

$$= (L_{gh})_*^{-1} (R_h)_* (L_g)_* v \quad (14)$$

$$= (L_h)^{-1} (R_h)_* v. \quad (15)$$



Nous avons utilisé ici la commutativité $R_h L_g = L_g R_h$.

DÉFINITION I.18 Par convention, l'application adjointe $\text{Ad}: G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est définie par

$$\text{Ad}(g, v) = (L_g)_* (R_g)_*^{-1} v. \quad (16)$$

Ainsi, nous constatons par le calcul précédent et cette nouvelle définition l'égalité suivante :

$$R_h^* \omega_G = \text{Ad}(h^{-1}) \omega_G. \quad (17)$$

Du fait de sa définition, l'application adjointe, lorsqu'un $g \in G$ a été choisi, fournit en réalité un isomorphisme linéaire de $\mathfrak{g}$. Ainsi,

$$\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}). \quad (18)$$

C'est pour cette raison que nous parlons aussi de *représentation adjointe*. En effet, pour la première fois, cette application permet de comprendre G comme un ensemble de transformations linéaires — qui agissent ici sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. *A priori*, cette représentation n'est pas fidèle, mais il va s'avérer que pour la classe des *algèbres de Lie semi-simples* cela est vrai ¹⁷.

En réalité, Ad est même à valeurs dans $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, puisque

$$\forall g \in G, \forall a, b \in \mathfrak{g}, \text{Ad}(g, [a, b]) = [\text{Ad}(g, a), \text{Ad}(g, b)]. \quad (19)$$

En effet, prenons A et B les deux champs de vecteurs invariants à gauche sur G engendrés respectivement par a et b . Il s'agit de vérifier — en prenant g^{-1} en lieu et place de g — que

$$\omega_G((R_g)_* [A, B]) = [\omega_G((R_g)_* A), \omega_G((R_g)_* B)] \quad (20)$$

$$= \omega_G([(R_g)_* A, (R_g)_* B]) \quad (21)$$

et cela est bien vrai puisque $(R_g)_* [A, B] = [(R_g)_* A, (R_g)_* B]$.

La représentation adjointe peut elle-même être dérivée en l'identité $e \in G$, donnant :

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}). \quad (22)$$

Nous avons comme dérivée de Darboux

$$\text{Ad}^* \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})} = \text{ad}(\omega_G). \quad (23)$$

Ce qui fait de la représentation adjointe $\text{Ad}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g})$ la seule fonction lisse valant l'identité en $e \in G$ et dont la dérivée de Darboux est $\text{ad}(\omega_G)$.

¹⁷. Par ailleurs historiquement, la preuve de Lie de son troisième théorème était valable pour les algèbres de Lie semi-simples. Cela provient du fait que la représentation adjointe est fidèle, et fournit donc le même résultat que le théorème d'Ado dans ce cas particulier. Cartan fera ce commentaire à plusieurs reprises.

Pour justifier cette dérivation, prenons $w_p \in T_p G$ tel que $\omega_G(w_p) = v \in \mathfrak{g}$ — en d'autres termes $w_p = (L_p)_* v$ —,

$$(\text{Ad } L_p)(x)(u) = \text{Ad}(px)(u) \quad (24)$$

$$= \omega_G((R_{px})_*^{-1}(u)) \quad (25)$$

$$= \omega_G((R_p^{-1} R_x^{-1})_*(u)) \quad (26)$$

$$= \text{Ad}(p) \text{Ad}(x)(u), \quad (27)$$

$$\text{Ad}^* \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(w_p) = \text{Ad}^* \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})}((L_p)_* v) \quad (28)$$

$$= \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(\text{Ad}_*(L_p)_* v) \quad (29)$$

$$= \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})}(\text{Ad}(p) \text{Ad}_* v) \quad (30)$$

$$= \text{ad}(v), \quad (31)$$

$$\text{ad}(\omega_G)(w_p) = \text{ad}(v). \quad (32)$$

La dernière identité classique qui s'obtient par calcul est

$$\forall u, v \in \mathfrak{g}, \text{ad}(u)(v) = [u, v]. \quad (33)$$

Un calcul qui sera important par la suite est le suivant. Considérons $G \times G$, π_1, π_2 les deux projections canoniques sur les facteurs et $\mu_G: G \times G$ la loi de produit de G .

$$\mu_G^* \omega_G = \pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G \quad (34)$$

Prenons $u_g \in T_g G$ et $v_h \in T_h G$.

$$\mu_G(g, h) = gh, \quad (35)$$

$$(\mu_G)_*(u_g, v_h) = (L_g)_*(v_h) + (R_h)_*(u_g), \quad (36)$$

$$\omega_G((L_g)_*(v_h) + (R_h)_*(u_g)) = \omega_G(v_h) + \text{Ad}(h)^{-1} \omega(u_g), \quad (37)$$

$$= \pi_2^* \omega_G(u_g, v_h) + ((\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G)(u_g, v_h). \quad (38)$$

Nous pouvons au passage faire le calcul de la dérivée de l'inverse $\iota: G \rightarrow G$ qui à g associe g^{-1} . Pour cela, nous observons que $\mu_G \circ (\iota \times \text{id}) \circ \Delta = e$, avec Δ l'application diagonale. Ainsi $\mu_G \circ (\text{id} \times \iota) \circ \Delta$ est de dérivée nulle et :

$$(\mu_G \circ (\text{id} \times \iota) \circ \Delta)^* \omega_G = ((\iota \times \text{id}) \circ \Delta)^* \mu_G^* \omega_G \quad (39)$$

$$= ((\text{id} \times \iota) \circ \Delta)^* (\pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G) \quad (40)$$

$$= \Delta^* (\text{id} \times \iota)^* (\pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G) \quad (41)$$

$$= \Delta^* (\iota^* \pi_2^* \omega_G + (\iota^* \pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G) \quad (42)$$

$$= \iota^* \omega_G + \text{Ad} \omega_G = 0 \quad (43)$$

$$\iff \iota^* \omega_G = -\text{Ad} \omega_G. \quad (44)$$

À présent nous pouvons revenir à l'étude de l'espace tangent d'un espace homogène. Il s'avère que le bon isomorphisme est

$$T^G/H \cong TG \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}. \quad (45)$$

Cet isomorphisme est induit (après passage au quotient du noyau) par l'application $\varphi: TG \times \mathfrak{g} \rightarrow T^G/H$ définie par

$$\varphi(g, v) = (\pi(g), \pi_*(L_g)_* v), \quad (46)$$

où π est la projection $G \rightarrow G/H$. Nous constatons ici que si g devient gh , alors $\pi(gh) = \pi(g)$ mais, puisque $\pi R_h = \pi$,

$$\pi_*(L_{gh})_* v = \pi_*(R_h)_*^{-1} (L_g L_h)_* v \quad (47)$$

$$= \pi_*(L_g)_* (L_h)_* (R_h)_*^{-1} v \quad (48)$$

$$= \pi_*(L_g)_* \text{Ad}(h) v \quad (49)$$

et donc l'action de H à droite sur G change v en $\text{Ad}(h)v$. Ainsi,

$$\varphi(g, v) = \varphi(gh, \text{Ad}(h^{-1})v) \quad (50)$$

ce qui explique le noyau et par suite le passage au quotient.

Cet isomorphisme explique par ailleurs que nous n'aurons une bonne quantification de l'espace tangent de G/H en termes de l'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ que s'il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$, qui est supplémentaire de $\mathfrak{h}$ et invariant par l'action de $\text{Ad}(H)$.

Avant de nous intéresser à ce phénomène, mentionnons le fait suivant. Si $G/H = X$ est un espace homogène, alors il existe une construction naturelle pour obtenir une (G, X) -structure au sens de THURSTON¹⁸.

DÉFINITION I.19 Une (G, X) -structure (de Thurston) est la donnée d'un pseudo-groupe analytique G agissant transitivement par difféomorphismes analytiques sur X , une variété lisse.

DÉFINITION I.20 Une variété lisse M a une (G, X) -structure s'il existe un atlas de cartes à valeurs dans X & ayant des fonctions de transitions constantes sur chaque intersection & appartenant à G .

Une (G, X) -structure sur une variété lisse M induit deux applications équivariantes : la développante (d'Ehresmann-Thurston), $D: \widetilde{M} \rightarrow X$, et le morphisme d'holonomie, $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$. Elles sont équivariantes en ce sens :

$$\forall x \in \widetilde{M}, \forall \gamma \in \pi_1(M), D(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot D(x). \quad (51)$$

Puisque G et $X = G/H$ sont ce qu'il y a de plus naturel à considérer, il suffit de préciser de quelle façon G agit sur X afin d'obtenir une (G, X) -structure naturelle pour les espaces homogènes.

DÉFINITION I.21 Si $X = G/H$ est un espace homogène, alors nous considérons la (G, X) -structure pour laquelle G agit à gauche sur X .

Cette action à gauche est le choix logique, puisque c'est celle pour laquelle nous sommes sûrs que l'action sera transitive. De plus, cela permet de voir une première dichotomie : si $h \in H$, alors l'action à gauche sur un élément xH est exactement égale à l'action par conjugaison $hxH = h x h^{-1} H$. Ainsi, pour cette géométrie homogène, H agit par conjugaison sur X . Le reste du groupe G (moralement, G/H) agit comme si c'était par translation. Mais bien sûr, en général, il n'est pas possible de considérer le groupe quotient G/H puisque H n'est peut-être pas normal. La bonne hypothèse pour justifier ce phénomène sera la réductibilité de l'espace homogène.

Géométriquement, il y a un phénomène dont nous aimerions nous prémunir. Généralement, il n'est pas possible de justifier le fait que l'action de G sur G/H est fidèle en le sens suivant.

DÉFINITION I.22 L'espace homogène G/H est fidèle si la seule transformation de G qui induit l'identité sur G/H est l'élément neutre de G .

En d'autres termes, et par analytisme, la connaissance d'une transformation g sur un ouvert de G/H la détermine complètement. La définition dit, en particulier, que la seule transformation de G qui agit comme l'identité est l'élément neutre. En général, si g_1 et g_2 transforment toutes deux U en V et de la même façon alors $g_1^{-1} g_2$ agit comme l'identité sur U et doit donc être, sous cette hypothèse de fidélité, égale à e .

En général, un espace homogène G/H n'est pas fidèle. En revanche, il est toujours possible de quotienter G et H afin d'obtenir le même espace homogène et une action cette fois-ci fidèle.

PROPOSITION I.23 Soit G un groupe de Lie & H un sous-groupe fermé. Soit K le sous-groupe de H engendré par tous les sous-groupes de H normaux dans G . Alors $G/K/H/K$ est difféomorphe à G/H & est fidèle.

¹⁸. [Thu97] THURSTON, *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1, 1997.

PREUVE Par définition K est un sous-groupe normal de G qui est contenu dans H . Par construction il est par ailleurs maximal. Puisque la fermeture de K est encore dans H et est encore normal dans G , c'est encore K et donc il est fermé. Puisque K est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie, c'est lui-même un groupe de Lie (fermé). Nous avons bien $G/K/H/K \cong G/H$.

Soit $k \in K$. Le fait que K est normal indique que pour tout $x \in G$, $kx = xk'$ pour un autre $k' \in K$. Mais alors, puisque $K \subset H$, cela donne $kxH = xH$. Donc les éléments de K agissent bien à gauche comme l'identité sur G/H .

Réciproquement, l'ensemble des transformations qui agissent comme l'identité sur G/H est bien un groupe. Désignons le par M . Considérons $m \in M$. Alors pour tout x et tout $h_1 \in H$, il existe $h_2 \in H$ tel que $m x h_1 = x h_2$. En particulier, pour $x = e$, il vient $m h_1 = h_2$ et donc $M \subset H$. De plus, si $x \in G$ alors montrons que $x m x^{-1}$ appartient encore à M . Pour tout $y \in G$,

$$(x m x^{-1}) y H = x (m (x^{-1} y H)) = x (x^{-1} y H) = y H. \quad (52)$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Revenons maintenant à la question de l'espace tangent de G/H . Souvent, une hypothèse géométriquement intéressante est celle de réductibilité. Nous avons vu précédemment que l'action à droite de H sur le tangent de l'espace homogène G/H était essentiellement prescrite par l'action adjointe de H . Ainsi, pour avoir une meilleure compréhension de l'espace tangent, la bonne hypothèse est la suivante.

DÉFINITION I.24 *L'espace homogène $\pi: G \rightarrow G/H$ est dit réductif¹⁹ s'il existe une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ avec $\text{Ad}(H)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.*

De nombreux espaces homogènes sont réductifs, notamment l'espace euclidien. Nous verrons avec les connexions de Cartan comment cette propriété permet d'expliquer — et de généraliser — les géodésiques riemanniennes sur des espaces, dont la relation avec un certain espace homogène réductif et la même que celle d'un espace riemannien avec l'espace euclidien. En un sens, une géodésique riemannienne est permise par un transport parallèle horizontal (c'est-à-dire dont la composante $\mathfrak{h}$ est nulle), ce qui nécessite une telle réductibilité de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Avant de passer à l'étude de cette question, qui n'interviendra qu'à la troisième section de ce chapitre, mentionnons la construction canonique des géodésiques sur un espace homogène réductif. Cette construction rejoint donc la définition des droites dans l'espace euclidien.

Sur un groupe de Lie G , nous avons défini les courbes géodésiques $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ comme étant celles dont la dérivée de Darboux est constante. En premier lieu, il faut vérifier que l'action à droite de H ne modifie pas cette propriété. Et c'est bien le cas, puisque

$$(R_h \gamma)^* \omega_G = \gamma^* R_h^* \omega_G = \gamma^* \text{Ad}(h^{-1}) \omega_G. \quad (53)$$

DÉFINITION I.25 *Une courbe lisse $\gamma: [0, 1] \rightarrow G/H$ est dite géodésique, si $\pi: G \rightarrow G/H$ est réductif — avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ — & s'il existe $v \in \mathfrak{p}$ tel que*

$$\gamma(t) = \pi(L_{\gamma(0)} \exp(tv)). \quad (54)$$

Le fait que l'action à droite de H préserve les géodésiques avec un facteur $\text{Ad}(h^{-1})$ justifie précisément pourquoi la définition précédente est invariante : il existe bien un sous-espace horizontal — à savoir $(L_G)_* \mathfrak{p} \subset TG$ — qui est totalement invariant par l'action de H .

19. Il serait peut-être plus correct littérairement d'employer le terme *réductible*, mais l'usage fait que nous parlons d'espace homogène (et aussi de groupe de Lie et d'algèbre de Lie) *réductif* alors que cela provient d'une propriété de *réductibilité* des représentations sous-jacentes.

I.3 EXEMPLES D'ESPACES HOMOGÈNES

Certains exemples cruciaux d'espaces homogènes méritent d'être détaillés, ils sont rassemblés dans cette partie.

L'espace affine C'est l'un des espaces homogènes les plus riches en transformations. L'espace affine est donné par le quotient :

$$\text{Aff}_n / \text{GL}_n(\mathbf{R}) \quad (55)$$

avec le groupe Aff_n des transformations affines : $\text{Aff}_n = \text{GL}_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$. Cet espace est naturellement réductif :

$$\mathfrak{aff}_n = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathbf{R}^n. \quad (56)$$

Une représentation utile sera donnée par le choix d'un plongement $\text{Aff}_n \subset \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$. Nous prendrons par exemple le plongement

$$\forall v \in \mathbf{R}^n, \forall A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R}). \quad (57)$$

L'algèbre de Lie du groupe affine est alors représentée par

$$\forall v \in \mathbf{R}^n, \forall A \in \mathfrak{gl}_n, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{n+1} \quad (58)$$

et avec ces expressions, il n'est pas difficile de calculer la représentation adjointe.

Le trio euclidien, sphérique & hyperbolique Commençons par l'espace euclidien. C'est l'espace homogène donné par le quotient

$$\text{Euc}_n / \text{O}_n(\mathbf{R}) \quad (59)$$

avec $\text{Euc}_n = \text{O}_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n \subset \text{Aff}_n$ qui est le groupe des isométries euclidiennes. Cet espace homogène est encore réductif :

$$\mathfrak{euc}_n = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n. \quad (60)$$

Dans la représentation précédente $\text{Aff}_n \subset \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$, nous avons que le groupe $\text{Euc}_n \subset \text{Aff}_n \subset \text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ est donné par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & A \end{pmatrix} \quad (61)$$

avec $A \in \text{O}_n(\mathbf{R})$.

Donnons maintenant l'expression des espaces sphérique et hyperbolique. Il va s'avérer, comme nous le verrons plus tard, que ces deux espaces sont des *mutations* de l'espace euclidien. Nous donnerons les morphismes de mutations bien que cette notion n'est pas encore définie.

Pour exprimer l'espace sphérique, remarquons que la sphère $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ peut être décrite par l'orbite de $(1, 0, \dots, 0)$ par le groupe $\text{O}_{n+1}(\mathbf{R})$. Ainsi, l'espace sphérique est l'espace homogène

$$\text{O}_{n+1}(\mathbf{R}) / \text{O}_n(\mathbf{R}) \quad (62)$$

et nous prenons l'inclusion $\text{O}_n(\mathbf{R}) \subset \text{O}_{n+1}(\mathbf{R})$ fournie par

$$\forall A \in \text{O}_n(\mathbf{R}), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \text{O}_{n+1}(\mathbf{R}). \quad (63)$$

Pour calculer l'algèbre de Lie, il faut utiliser la définition de $\text{O}_{n+1}(\mathbf{R})$, à savoir que ce groupe est constitué de matrices qui sont de déterminant 1 et dont l'inverse est égal à la transposée. L'équation $\det M = 1$ se dérive en $\text{tr } M = 0$ et ${}^t M M = I_n$ en ${}^t M + M = 0$. Donc l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}_{n+1}$ est donnée par les matrices de trace nulle et anti-symétriques (elles sont donc de diagonale nulle). Nous avons dans l'algèbre de Lie les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^t v \\ v & A \end{pmatrix}, \quad (64)$$

avec $v \in \mathbf{R}^n$ et $A \in \mathfrak{o}_n$. Ainsi, l'espace sphérique est bien réductif et

$$\mathfrak{o}_{n+1} = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n. \quad (65)$$

Le morphisme de $\text{euc}_n \rightarrow \mathfrak{o}_{n+1}$ donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu & A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -{}^t\nu \\ \nu & A \end{pmatrix} \quad (66)$$

fournit la mutation de l'espace euclidien en l'espace sphérique.

Quant à l'espace hyperbolique, nous utiliserons le modèle de l'hyperboloïde. Ce modèle consiste à prendre la projectivisation de l'ensemble des vecteurs $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ qui vérifient

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 < 0. \quad (67)$$

L'espace $\mathbf{R}^{n+1}$ muni de cette forme quadratique est aussi appelé *espace de Lorentz*, et est parfois désigné par $\mathbf{R}^{n,1}$. Le sous-groupe de $\text{PGL}_{n+1}(\mathbf{R})$ qui préserve cet ensemble est $\text{PO}(n, 1)$. Un point de l'espace hyperbolique est donné par le point projectif $[1 : 0 : \dots : 0]$. Le stabilisateur de ce point est un sous-groupe de $\text{PGL}_{n+1}(\mathbf{R})$ que l'on peut identifier à $\text{PO}(n)$. Nous pouvons représenter $\text{PO}(n)$ dans $\text{PO}(n, 1) \subset \text{PGL}_{n+1}(\mathbf{R})$ par les classes de matrices de $\text{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ donnée par, avec $A \in \text{O}(n)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \quad (68)$$

L'algèbre de Lie de $\text{PO}(n, 1)$ est donnée par les matrices de trace nulle (car de déterminant 1 dans le groupe) et qui vérifient ${}^tMJ + JM = 0$ avec J la matrice diagonale donnée par $(-1, 1, \dots, 1)$. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t\nu \\ \nu & A \end{pmatrix} \quad (69)$$

avec $\nu \in \mathbf{R}^n$ et $A \in \mathfrak{o}_n$ décrivent donc cette algèbre de Lie. Nous avons encore que l'espace hyperbolique est réductif:

$$\mathfrak{po}_{n,1} = \mathfrak{o}_{n,1} = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n. \quad (70)$$

Le morphisme qui donnera la mutation $\text{euc}_n \rightarrow \mathfrak{po}_{n,1}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nu & A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & {}^t\nu \\ \nu & A \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Modèles plats de la relativité générale Des théories contemporaines de la relativité générale d'Einstein utilisent le langage des espaces généralisés de Cartan ²⁰. Des modèles plats (sur lesquels ces espaces se forment), qui peuvent être vus comme des modèles locaux de la relativité générale, sont au nombre de trois selon le signe de la constante cosmologique Λ . Ces espaces G/H sont donnés par :

$$G = \begin{cases} \text{SO}(n, 1) & \text{si } \Lambda > 0 \text{ (de Sitter)} \\ \text{SO}(n-1, 1) \ltimes \mathbf{R}^n & \text{si } \Lambda = 0 \text{ (Minkowski)} \\ \text{SO}(n-1, 2) & \text{si } \Lambda < 0 \text{ (anti de Sitter)} \end{cases} \quad (72)$$

$$\text{et } H = \text{SO}(n-1, 1). \quad (73)$$

Ces espaces sont tous réductifs.

Sphère conforme & sphère CR Donnons tout de même deux espaces homogènes (qui seront majeurs par la suite) et qui ne sont pas réductifs. Considérons l'équation

$$-|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 0 \quad (74)$$

et regardons la projectivisation de ses solutions non nulles. Lorsque le corps est $\mathbf{R}$ c'est le bord de l'espace hyperbolique (réel) précédemment construit. Avec le corps $\mathbf{C}$, c'est le bord de l'espace hyperbolique complexe. Topologiquement, c'est une sphère. En effet, prenons la carte $x_1 = 1$ (toutes les solutions s'y trouvent), nous avons alors l'équation classique $|x_2|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 1$.

Dans le cas réel, le groupe $\text{PO}(n, 1)$ agit transitivement, dans le cas complexe c'est $\text{PU}(n, 1)$. Le stabilisateur d'un point (par exemple le point projectif $[1 : 1 : 0 : \dots : 0]$) est

²⁰. [Wis09] WISE, « Symmetric space Cartan connections and gravity in three and four dimensions », 2009.

donné par un sous-groupe parabolique $P_{\mathbf{R}} \subset \mathrm{PO}(n, 1)$, $P_{\mathbf{C}} \subset \mathrm{PU}(n, 1)$. Si nous procédons à la décomposition d'Iwasawa de ces deux groupes semi-simples, $G = KAN$, le groupe parabolique P est donné par MAN où $M \subset K$ est le sous-groupe qui fixe le point choisi.

La sphère conforme est l'espace homogène

$$\mathrm{PO}(n, 1) / P_{\mathbf{R}} \quad (75)$$

et il s'avère (en utilisant le théorème de Liouville, en dimension au moins trois) qu'elle est identifiable à la sphère usuelle sur laquelle agit le groupe des transformations conformes. La sphère CR est l'espace homogène

$$\mathrm{PU}(n, 1) / P_{\mathbf{C}}. \quad (76)$$

Ces deux sphères sont différentes dans le sens où leurs groupes $\mathrm{PO}(n, 1)$ et $\mathrm{PU}(n, 1)$ sont très différents. Outre la dimension à adapter (car la sphère complexe est de dimension réelle $2n - 1$), ces deux groupes n'ont, par exemple, pas la même partie nilpotente dans la décomposition d'Iwasawa KAN . Dans le cas réel, $N_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{n-1}$ est euclidien (commutatif) et dans le cas complexe, $N_{\mathbf{C}}$ est le groupe d'Heisenberg de dimension $2(n - 1) + 1$ (et n'est donc pas commutatif).

II — VARIÉTÉ À FORME DE CARTAN ET TROISIÈME THÉORÈME DE LIE

Cette section, qui fait office de transition, va tenter d'expliquer comment, à partir d'une donnée sur une algèbre de Lie, nous pouvons construire le groupe de Lie simplement connexe correspondant.

À l'origine du troisième théorème de Lie réside la question suivante : qu'elle est la correspondance entre algèbres de Lie et groupes de Lie ? Par construction, nous savons déjà dériver une algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Nous savons par ailleurs que cela implique qu'une telle correspondance est seulement locale ou, en d'autres termes, probablement unique si le groupe est simplement connexe. En effet, l'espace tangent en l'élément neutre d'un groupe de Lie ne dépend que d'un voisinage de ce point, et il est donc aisé de construire deux groupes de Lie distincts avec la même algèbre de Lie en prenant par exemple un quotient.

La preuve classique de cette correspondance consiste à utiliser le théorème de représentation d'Ado²¹. Cela permet de voir une algèbre de Lie réelle comme sous-algèbre d'une certaine algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. Il est alors possible de passer à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ ayant comme algèbre de Lie celle choisie initialement. Le revêtement universel de ce sous-groupe est alors un bon candidat pour être le groupe de Lie simplement connexe avec la bonne algèbre de Lie. Mais encore faut-il démontrer que c'est bien un groupe de Lie, et c'est un objectif indirect de cette section.

La preuve plus traditionnelle consiste en réalité à regarder l'image locale par l'exponentielle, et grâce à la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, cela donne presque le groupe recherché. Nous pourrions par exemple consulter le livre de SERRE²². Serre propose également une preuve historique de ce théorème, due à Élie Cartan qui est encore différente.

Dans un texte de CARTAN²³, qui est en réalité le texte d'une conférence donnée à Genève en 1935, il est souligné que la réciproque du troisième théorème de Lie — qui doit donner le groupe à partir de l'algèbre — n'est connue que de façon locale²⁴. Le seul cas de connaissance globale, qui date de Lie, vient du fait que la représentation adjointe est fidèle lorsque le groupe G est semi-simple. Le théorème d'Ado (dont la première occurrence apparaît en russe) date lui aussi de 1935, et donc Cartan n'en n'a pas encore connaissance. Dans ce même article, Cartan propose une approche de

21. [Bou71] BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre I : Algèbres de Lie*, 1971.

22. [Ser06] SERRE, *Lie algebras and Lie groups*, 2006.

23. [Car36] CARTAN, « La Topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie », 1936.

24. Cette même question est déjà discutée dans le mémoire de CARTAN de 1930 [Car30].

preuve par une sorte de récurrence, en utilisant le fait que le théorème est connu et vrai pour les groupes semi-simples et abéliens.

Dans cette preuve (que nous traduisons en des termes plus contemporains), si nous disons que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie donnée, Cartan utilise l'existence d'une variété M munie d'une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et qui vérifie l'équation de structure. Il est n'est pas difficile de construire une telle forme sur $M = \mathfrak{g}$ en considérant :

$$\omega_g(v_g) = \int_0^1 \exp(-t \operatorname{ad}(g)) v_g dt. \quad (77)$$

Mais cette forme n'est un isomorphisme sur les fibres du tangent de M que localement autour de l'origine²⁵. Ce qui revient, en somme toute, à permettre une description locale du groupe de Lie recherché. Et Cartan a pourtant bien spécifié qu'il faut une 1-forme ω sur M qui soit partout «linéairement indépendante».

Nous appellerons *forme de Cartan* une telle 1-forme ω sur une variété lisse M qui vérifie l'équation de structure, est en tout point injective et vérifie une condition d'intégrabilité globale.

II.1 VARIÉTÉ À FORME DE CARTAN

L'un des gestes centraux de la preuve du troisième théorème de Lie — quelle que soit la façon choisie pour le démontrer — consiste à construire un groupe de Lie à partir d'une donnée algébrique (une algèbre de Lie). La construction de ce groupe invoque nécessairement un outil transcendants aux groupes, puisque le groupe de Lie ne peut exister avant son invocation.

Une voie possible pour construire un groupe peut consister — comme cela est pratiqué traditionnellement²⁶ — à utiliser la représentation fournie par le théorème d'Ado, l'exponentielle et la formule de Campbell-Baker-Hausdorff. Cela permet, au moins localement, d'avoir une nouvelle donnée géométrique à partir de la donnée algébrique.

CARTAN²⁷ a proposé une autre approche. Elle consiste à intégrer une équation différentielle pour passer des constantes de structures²⁸ à une 1-forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie et vérifiant l'équation de structure²⁹. Mais cette approche a le défaut de ne pas suffisamment expliquer quel est l'espace sur lequel est défini ω .

L'approche proposée par SHARPE³⁰ fait appel au théorème de représentation d'Ado pour obtenir une telle 1-forme ω . Cependant, il ne justifie pas exactement comment passer d'une 1-forme ω à un groupe de Lie ayant ω pour forme de Maurer-Cartan³¹.

Nous allons suivre ici l'approche de Sharpe, en prenant soin de montrer comment la donnée d'une 1-forme ω permet encore d'intégrer l'équation de structure. En fait, il va s'agir de généraliser le théorème d'intégration globale des dérivées de Darboux à des espaces qui ne sont plus des groupes.

DÉFINITION II.1 *Soit X une variété lisse connexe & $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Nous dirons qu'une 1-forme ω de X à valeurs dans $\mathfrak{g}$ est une forme de Cartan si :*

25. C'est ce phénomène qui fait dire à Cartan que la connaissance du troisième théorème de Lie n'était que locale.

26. [Bou72] BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres. Chapitre III: Groupes de Lie*, 1972.

27. [Car35] CARTAN, *La Méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus & les espaces généralisés*, 1935.

28. Les constantes de structures sont les constantes qui apparaissent de la façon suivante. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel sous-jacent, alors les constantes de structures c_{ij}^k sont les coefficients des vecteurs $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ (avec la convention de sommation des indices et exposants).

29. Bien sûr, cette 1-forme est choisie de façon que les constantes structurelles en découlent. En effet : $d\omega(X_i, X_j) = -[\omega(X_i), \omega(X_j)]$ et donc, si ω est injective sur les fibres du fibré tangent, il suffit de regarder en e et de prendre $X_i = e_i$ et $X_j = e_j$ pour récupérer les constantes de structure.

30. [Sha97] SHARPE, *Differential geometry*, 1997.

31. Cela est très étonnant, et est probablement un oubli dans l'édition à la vue des commentaires de Sharpe qui suivent la démonstration qu'il propose.

- (1) la forme ω vérifie l'équation de structure $d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0$;
- (2) la forme $\omega: TX \rightarrow \mathfrak{g}$ est injective sur chaque fibre du fibré tangent $TX \rightarrow X$;
- (3) si V est un champ de vecteurs sur X tel que $\omega(V)$ est constant, alors V est complet.

Nous dirons que ω est une forme de Cartan stricte si ω est un isomorphisme sur chaque fibre de $TX \rightarrow X$. Nous dirons que $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ est une variété à forme de Cartan (stricte) si X est une variété lisse munie d'une forme de Cartan (stricte) ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

DÉFINITION II.2 Soit $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan. Soit $f: M \rightarrow X$ une fonction lisse avec M une variété lisse. La dérivée de Darboux de f est la 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ définie par $f^*\omega = \omega f_*$.

Lorsque nous avons un groupe de Lie, nous pouvons faire le raisonnement suivant. Si $f, g: M \rightarrow X$ ont la même dérivée de Darboux, alors $f g^{-1}$ a la forme nulle comme dérivée de Darboux et est donc constante dans X , ce qui spécifie la translation à gauche qui fait différer f de g , et montre par ailleurs $f = g$ si $f(p) = g(p)$ en un point p .

Ici, ce n'est plus possible puisque nous n'avons plus de loi de groupe pour faire $f g^{-1}$. Il faudra donc investiguer proprement la question de l'unicité d'une fonction étant donnée une dérivée de Darboux et une condition initiale.

THÉORÈME II.3 (Intégration locale) Soit $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan. Soit M une variété lisse munie d'une 1-forme η à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

Supposons que η vérifie l'équation de structure & que ω est surjective sur l'image globale de η en chaque fibre de TX (c'est le cas si X est une variété à forme de Cartan stricte). Alors étant donné $(p, q) \in M \times X$, il existe un ouvert U contenant p & une unique fonction lisse $f: U \rightarrow X$ telle que $f^*\omega = \eta$ & $f(p) = q$.

Avant de prouver ce théorème, explicitons l'hypothèse de surjectivité. Naturellement, la conclusion $f^*\omega = \eta$ impose que l'image de η soit contenue dans l'image de ω . L'image (globale) de η est la réunion

$$\text{Im } \eta = \bigcup_{p \in M} \text{Im } \eta_p \subset \mathfrak{g} \quad (78)$$

et l'hypothèse consiste à dire qu'en tout point $x \in X$, ω_x est surjective sur $\text{Im } \eta$ ³².

PREUVE La preuve consiste à regarder une bonne distribution sur $M \times G$ qui nous donnera des feuilles locales d'intégration et que nous interpréterons comme des graphes de solutions.

Si nous avons une solution f , alors automatiquement, si nous avons $f_*(v_x) = w_y$ alors nous aurions $\eta(v_x) = \omega(w_y)$. Nous regardons donc l'équation $\eta(v_x) = \omega(w_y)$ en $(x, y) \in M \times X$. Elle définit la forme $\Omega = \pi_M^* \eta - \pi_X^* \omega$.

Cette forme définit la distribution $\Omega = 0$, puisqu'elle est de rang constant. En effet, $(\pi_M)_*$ fournit un isomorphisme entre l'espace tangent en un point (x, y) de $\Omega = 0$ et $T_x M$. Si $\eta(v_x) = \omega(w_y)$ alors $(\pi_M)_*(v_x, w_y) = v_x = 0$ implique $\omega(w_y) = 0$ et donc $w_y = 0$ puisque ω est injective sur la fibre $T_y X$. Si $\eta(v_x) \in \mathfrak{g}$ est donné, alors il existe bien w_y tel que $\omega(w_y) = \eta(v_x)$ car ω est surjective sur l'image de η .

Cette distribution est intégrable. En effet, $d\Omega = \pi_M^* d\eta - \pi_X^* d\omega$, et $d\eta$ et $d\omega$ vérifient toutes deux l'équation de structure : si $\Omega(v_x, w_y) = 0$ et $\Omega(v'_x, w'_y) = 0$, alors

$$d\Omega((v_x, w_y), (v'_x, w'_y)) = d\eta(v_x, v'_x) - d\omega(w_y, w'_y) \quad (79)$$

$$= -[\eta(v_x), \eta(v'_x)] + [\omega(w_y), \omega(w'_y)] \quad (80)$$

$$= -[\eta(v_x), \eta(v'_x)] + [\eta(v_x), \eta(v'_x)] = 0. \quad (81)$$

Puisque $(p, q) \in M \times X$ est donné, il existe une unique feuille locale de $\Omega = 0$ contenant (p, q) . Puisque $(\pi_M)_*$ est un isomorphisme partout, π_M est un difféomorphisme localement autour de (p, q) . Soient $U \subset M$ et $W \subset \{\Omega = 0\}$ deux ouverts tels que π_M

32. Nous pourrions nous demander s'il ne suffit pas de supposer que ω_x soit surjective sur une image ponctuelle η_p variant le long du développement. Cela semble en effet suffisant et nécessaire, mais autrement plus difficile à formuler et sans pour autant améliorer l'applicabilité du résultat.

réalise un difféomorphisme entre $(W, (p, q))$ et (U, p) . Soit $F: U \rightarrow W$ l'application réciproque et $f = \pi_X \circ F$. Par construction $f(p) = q$ et $F^*\Omega = 0$,

$$F^*\Omega = F^*\pi_M^*\eta - F^*\pi_X^*\omega, \quad (82)$$

$$f^*\omega = F^*\pi_X^*\omega = \eta. \quad (83)$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Afin d'espérer un passage du local au global du théorème précédent, il nous faut encore étudier le développement plus simple des chemins. En effet, si une fonction globale $f: M \rightarrow X$ existe, alors tous les chemins entre x et y dans M doivent se développer en chemins entre $f(x)$ et $f(y)$ dans X . En particulier, $f(y)$ est invariant. Commençons par prouver que nous pouvons en effet développer n'importe quel chemin de M globalement.

PROPOSITION II.4 *Soit $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan. Soit η une 1-forme de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Si ω est surjective sur l'image de η en chaque fibre de TX , alors il existe (globalement) une fonction lisse $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma^*\omega = \eta$. Elle est de plus unique si $\gamma(0)$ est prescrit.*

PREUVE Reprenons le théorème précédent. Nous obtenons $\gamma: U \rightarrow X$. Supposons U maximal dans $[0, 1]$ (et non égal à $[0, 1]$). C'est-à-dire qu'il existe $T \in [0, 1]$ tel que γ n'est défini que pour $t < T$. Cela montre que $\gamma(t)$ diverge lorsque $t \rightarrow T$. En effet, sinon, il suffirait de développer η en $\gamma(T)$ et de prolonger U par réunion.

Par continuité, lorsque $t \rightarrow T$, nous avons $\gamma^*\omega = \eta$ qui tend vers $\eta|_T$. Soit V un champ de vecteurs de $[0, 1]$ jamais nul. Il engendre l'espace tangent $T[0, 1]$ et détermine donc η . Soit $v(t) = \eta(V)|_t$. Il s'ensuit que $\omega(\gamma'(t)) = v(t)$.

Puisque η est lisse, $v(t)$ l'est aussi et donc lorsque $t \rightarrow T$, nous avons $v(t) \rightarrow w = v(T)$. Mais d'autre part, si W est le champ de vecteur sur X donné par $\omega^{-1}(w)$, alors W est complet par hypothèse sur ω . Pour rappel, puisque $v(T)$ appartient à l'image de η et que ω est surjective sur l'image de η ainsi qu'injective, $\omega^{-1}(w)$ est bien en tout point de X univoquement défini.

Par complétude, le flot de W est complet. Disons qu'il s'agit de ϕ . Mais $\gamma'(t) \rightarrow w$, et donc $\gamma \rightarrow \phi$. Mais ϕ n'explose pas, et donc γ ne peut pas diverger, ce qui est absurde. Donc η est bien développable globalement. $\square$

Par conséquent, si $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ est une variété à forme de Cartan et si M une variété lisse munie d'une 1-forme η à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Alors, si ω est surjective sur l'image de η en chaque fibre de TX , il existe une application de développement des chemins

$$D: \Lambda(M) \rightarrow \Lambda(X), \quad (84)$$

où $\Lambda(Z)$ désigne l'ensemble des chemins $\gamma: [0, 1] \rightarrow Z$ d'une variété Z . Pour cela, il suffit de fixer un point de X depuis lequel tous les développements sont basés.

Cela fournit également une application de point final de cette développante, qui est la composition naturelle de D avec $\rho: \Lambda(X) \rightarrow X$ donnée par $\rho(\gamma) = \gamma(1)$:

$$E: \Lambda(M) \rightarrow X. \quad (85)$$

Comme précédemment, il va maintenant s'agir de montrer que de l'application E , nous pouvons en déduire une application $\tilde{D}: \tilde{M} \rightarrow X$, où nous verrons $\tilde{M}$ comme l'ensemble des chemins partageant une même base et à homotopie près. Pour cela, il nous faut le résultat suivant.

PROPOSITION II.5 *Soit $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan. Soit M une variété lisse munie d'une 1-forme η à valeurs dans $\mathfrak{g}$ & qui vérifie l'équation de structure. De plus, supposons que ω est surjective sur l'image de η sur chaque fibre de TX .*

Soit $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ une homotopie lisse à extrémités fixées entre les chemins $H(0, t) = \gamma(t)$ & $H(1, t) = \mu(t)$. Soit $x \in X$ & $D(\gamma), D(\mu)$ les développements des chemins basés en $x \in X$. Alors $E(\gamma) = E(\mu)$.

PREUVE Soit $T \in [0, 1]$. Alors H fournit un chemin $H(s, T)$ entre les points $\gamma(T)$ et $\mu(T)$. En particulier, pour $T = 1$, $H(s, 1)$ est un chemin (qui est en fait stationnaire) entre $\gamma(1)$ et $\mu(1)$. Ainsi, le développement de $H(s, 1)$ dans X , basé en n'importe quel

point, donne toujours le chemin stationnaire. Il suffit donc de démontrer que H est globalement développable en $\tilde{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$: cela montrera que $E(\gamma) = E(\mu)$ (puisque la dérivée est nulle lorsque $t = 1$).

Considérons la 1-forme $H^*\eta$ définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Elle vérifie l'équation de structure puisque c'est le cas de η . Par composition, ω est encore surjective sur l'image de $H^*\eta$. Il existe donc une intégrale locale maximale pour l'inclusion $\tilde{H}: U \rightarrow X$ telle que $\tilde{H}^*\omega = H^*\eta$, avec $U \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Par l'absurde, nous supposons $U \neq [0, 1] \times [0, 1]$.

Cette intégrale peut être choisie unique en spécifiant $\tilde{H}(0, 0) = \gamma(0) = \mu(0)$. Et nous savons déjà que les restrictions $\tilde{H}(0, t) = \gamma(t)$ et $\tilde{H}(1, t) = \mu(t)$ sont pleinement développées en $D(\gamma)$ et $D(\mu)$ (par unicité). Supposons que $(S, T) \in \partial U - U$. Cela signifie qu'il n'y a pas de développement possible de H en (S, T) . En réalité, $H(s, T) = \rho(s)$ est développable en tant que chemin.

Développons H en $\tilde{H}': V \rightarrow X$ autour de (S, T) en spécifiant $\tilde{H}'(S, T) = D(\rho)(S)$. Nous avons $\tilde{H}'(0, T) = \tilde{H}(0, T)$. Par unicité, cela montre que $\tilde{H}' = \tilde{H}$ sur $V \cap U$. Donc en réalité U n'est pas maximal, ce qui donne la contradiction attendue. $\mathbb{N}$

Par conséquent, le développement de deux chemins de M ne dépend pas de leur classe d'homotopie. Pour chaque chemin γ de M basé en x , nous avons $D(\gamma)^*\omega = \gamma^*\eta$. Par le résultat précédent, cela ne dépend plus de la classe d'homotopie et définit donc une application entre $\tilde{M}$ et X .

COROLLAIRE II.6 (Développante de Cartan et intégration globale) *Soit $(X, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan. Soit M une variété lisse connexe munie d'une 1-forme η à valeurs dans $\mathfrak{g}$ & qui vérifie l'équation de structure. De plus, supposons que ω est surjective sur l'image de η sur chaque fibre de TX .*

Fixons $p \in M$ & $x \in X$. Regardons le revêtement universel $\tilde{M} \rightarrow M$ comme l'ensemble des classes à homotopie près relative aux extrémités des chemins basées en p . Nous obtenons les faits suivants.

(1) *Il existe une unique application lisse — appelée développante de Cartan —*

$$D: \tilde{M} \rightarrow X \quad (86)$$

qui à un chemin dans M basé en p associe le point final du chemin développé dans X basé en x . De plus

$$D^*\omega = \eta. \quad (87)$$

(2) *La développante de Cartan $D: \tilde{M} \rightarrow X$ est un difféomorphisme local si, & seulement si, ω & η ont même rang.*

(3) *Si M est simplement connexe, alors $\tilde{M} = M$ & la développante de Cartan est une intégrale globale de η . Elle est unique sous la condition $D(p) = x$.*

II.2 TROISIÈME THÉORÈME DE LIE

Comme nous l'avons discuté en introduction, la preuve que nous allons proposer du troisième théorème de Lie va utiliser le théorème d'Ado³³ : toute algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ a une représentation fidèle $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, avec V un espace vectoriel réel.

Nous ne reprendrons pas le théorème d'Ado, mais justifions tout de même les deux phénomènes suivant. Le premier montre que deux groupes de Lie simplement connexes qui ont la même algèbre de Lie sont en fait difféomorphes. Le deuxième phénomène est celui du passage d'une sous-algèbre de Lie à un sous-groupe.

PROPOSITION II.7 Soient G et H deux groupes de Lie, avec G simplement connexe. Tout morphisme entre les algèbres de Lie $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ est induit par un unique morphisme de groupes de Lie $\Phi: G \rightarrow H$.

33. [Bou72] BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres. Chapitre III: Groupes de Lie*, 1972.

PREUVE La composition $\omega = \varphi\omega_G$ donne une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{h}$ qui vérifie elle aussi l'équation de structure. Par intégrabilité globale, elle est la dérivée de Darboux d'une unique fonction lisse $\Phi: G \rightarrow H$ qui peut être prise telle que $\Phi(e_G) = e_H$ et $\Phi^*\omega_G = \omega$. En dérivant, pour $g \in G$ fixé, $f(x) = \Phi(g)^{-1}\Phi(gx)$, nous constatons que $f^*\omega_H = \omega$ et $f(e) = e$. Donc $f = \Phi$, ce qui montre que Φ est bien un morphisme de groupes. $\square$

PROPOSITION II.8 Soit G un groupe de Lie avec pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie. Alors il existe un unique sous-groupe connexe $H \subset G$ ayant $\mathfrak{h}$ comme algèbre de Lie.

PREUVE Nous considérons la distribution $\omega_G^{-1}(\mathfrak{h})$. Elle est de rang constant. Si $\omega_G(X) \in \mathfrak{h}$ et $\omega_G(Y) \in \mathfrak{h}$ alors nous avons aussi $d\omega_G(X, Y) = -[\omega_G(X), \omega_G(Y)] \in \mathfrak{h}$ puisque $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie. Donc cette distribution est intégrable et fournit H en prenant l'unique feuille maximale en l'élément neutre. La loi de groupe de H étant donnée par celle de G . $\square$

Considérons une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$. En suivant les commentaires introductifs, si nous commençons avec une variété lisse M et une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui vérifie l'équation de structure, alors cela est encore possible avec le revêtement universel de M en tirant-en-arrière ω par $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$.

THÉORÈME II.9 (Intégration d'un groupe de Lie) *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle. Soit $(M, \mathfrak{g}, \omega)$ une variété à forme de Cartan stricte³⁴. En d'autres termes, M est une variété lisse munie d'une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$, & de sorte que :*

- (1) *la forme ω vérifie l'équation de structure;*
- (2) *la forme $\omega: TM \rightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme sur chaque fibre du fibré tangent $TM \rightarrow M$;*
- (3) *la forme ω est complète : chaque champ de vecteur sur M constant selon ω est complet.*

Alors, avec $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M & pour un choix arbitraire de $e \in \widetilde{M}$, il existe une unique structure de groupe de Lie sur $\widetilde{M}$ dont la forme de Maurer-Cartan est π^ω.*

PREUVE Bien sûr, la forme ω sur M fournit une forme que nous noterons encore ω sur $\widetilde{M}$ par tiré-en-arrière. Cette forme vérifie encore les mêmes hypothèses.

L'idée va consister à écrire les dérivées par rapport à ω des applications interprétant les axiomes de groupe sur $\widetilde{M}$, et d'utiliser l'équation de structure pour montrer qu'elles proviennent bien d'applications totalement définies. Décidons dès à présent d'un point $e \in \widetilde{M}$.

Nous aurons rapidement besoin de la représentation adjointe. Commençons donc par elle. Puisque $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, nous pouvons toujours considérer le groupe de Lie $GL(\mathfrak{g})$. L'application naturelle que nous aurions entre $\widetilde{M}$ — si c'était un groupe de Lie — et $GL(\mathfrak{g})$ est la représentation adjointe, dont la dérivée serait $Ad^* \omega_{GL(\mathfrak{g})} = ad(\omega)$. Ainsi, posons l'application

$$ad(\omega): T\widetilde{M} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad (88)$$

qui est bien définie avec la seule donnée de $\mathfrak{g}$ puisque $ad(x)(y)$ peut-être défini par $ad(x)(y) = [x, y]$. L'équation de structure est bien respectée :

$$d(ad(\omega)) = ad(d\omega) = ad\left(-\frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]\right) = -\frac{1}{2}[ad(\omega) \wedge ad(\omega)]. \quad (89)$$

L'intégration (classique, à l'aide du groupe de Lie $GL(\mathfrak{g})$) de $ad(\omega)$ donne une fonction lisse

$$Ad: \widetilde{M} \rightarrow GL(\mathfrak{g}) \quad (90)$$

³⁴. L'hypothèse que c'est une variété à forme de Cartan *stricte* permettra de s'assurer que $\pi^*\omega$ sera bien la forme de Maurer-Cartan de $\widetilde{M}$.

que nous pouvons prendre de sorte que $\text{Ad}(e) = e$.

À présent, nous allons intégrer les fonctions de produit et d'inverse d'un groupe. Soit G un groupe de Lie. Désignons par π_1 et π_2 les deux projections de $G \times G \rightarrow G$. Soit $\mu: G \times G \rightarrow G$ le produit de groupe et $\iota: G \rightarrow G$ son inverse.

$$\mu^* \omega_G = \pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G \quad (91)$$

$$\iota^* \omega_G = -\text{Ad} \omega_G \quad (92)$$

Nous considérons la 1-forme sur $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\eta = \pi_2^* \omega + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega. \quad (93)$$

Cette forme vérifie l'équation de structure (ce qui se voit par un calcul). Il existe donc une unique fonction lisse (qui est la développante de Cartan de η)

$$\mu: \widetilde{M} \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \quad (94)$$

dont la dérivée de Darboux est η et telle que $\mu(e, e) = e$.

Pour montrer que μ est un homomorphisme, il suffit de montrer par le calcul que

$$(\text{Ad} \circ \mu)^* \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})} = (\mu \circ (\text{Ad} \times \text{Ad}))^* \omega_{\text{GL}(\mathfrak{g})}. \quad (95)$$

De même, pour montrer l'associativité de μ il faut calculer l'égalité

$$(\mu \circ (\text{id} \times \mu))^* \omega = (\mu \times (\mu \times \mu))^* \omega. \quad (96)$$

Enfin, l'application inverse ι est définie en considérant la 1-forme $-\text{Ad} \omega$ qui est bien intégrable. Pour vérifier que nous avons bien $\mu(\iota, \text{id}) = e$, il suffit de vérifier que $(\mu \circ (\iota \times \text{id}) \circ \Delta)$ a une dérivée de Darboux nulle :

$$(\mu \circ (\iota \times \text{id}) \circ \Delta)^* \omega = 0. \quad (97)$$

Cela conclut l'esquisse de la preuve, les calculs n'ayant pas été complètement détaillés.

✎

III — ESPACE GÉNÉRALISÉ

Les espaces généralisés fournissent l'outil et la notion géométrique adéquats pour simultanément étendre le champ des résultats précédents aux espaces homogènes et étendre très largement l'ensemble des objets géométriques descriptibles. Les idées de Cartan ont puisé dans les évolutions théoriques de la physique du début du XX^e siècle, notamment avec les apports majeurs d'Einstein à travers les théories de la relativité — restreinte puis générale. Le premier mémoire de CARTAN³⁵ sur les espaces généralisés passe par ailleurs par une large discussion et un examen attentif de la mécanique de Newton et de la mécanique des milieux continus. Cela lui permet d'émettre un certain nombre de contraintes qu'une théorie géométrique générale — pouvant écrire la géométrie de Newton et d'Einstein dans un langage commun — devrait satisfaire.

Aujourd'hui, si nous sommes tout particulièrement intéressés par les connexions de Cartan *plates*, cela n'était pas exactement le sujet initial de Cartan. C'est son élève Ehresmann — mais aussi Whitehead en Amérique — qui prendront très au sérieux la question des *espaces localement homogènes*. En effet, pour Cartan, un espace généralisé a sa géométrie prescrite par sa connexion. C'est cette connexion qui exprime les lois physiques d'un espace géométrique. Un espace généralisé pour lequel une connexion est plate signifie que les forces physiques de cet espace sont nulles : le système est en complète inertie. Les motivations initiales de Cartan provenant de la physique, il n'est donc pas très étonnant que les espaces localement homogènes ne lui semblaient pas suffisamment riches pour être étudiés pour eux-mêmes.

La formulation contemporaine des connexions et espaces généralisés de Cartan sont en termes de fibrés principaux. Ce modernisme a été le fruit de travaux largement postérieurs aux premiers mémoires de Cartan, notamment à travers Ehresmann et

35. [Car23] CARTAN, « Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) », 1923.

Chern. Avant de procéder à cet exposé moderne, il nous a semblé que la formulation originelle était complètement digne d'intérêt et géométriquement explicite. Si nous suivons la lecture de CARTAN³⁶ sur les connexions projectives³⁷ nous pouvons lire la description suivante.

Une variété (ou espace) à connexion projective est une variété numérique, qui, au voisinage immédiat de chaque point, présente tous les caractères d'un espace projectif et douée de plus d'une loi permettant de raccorder en un seul espace projectif les deux petits morceaux qui entourent deux points infiniment voisins. Pour donner un sens précis à cette définition, il suffit d'imaginer qu'on a attaché à chaque point de la variété un espace projectif dont ce point fait partie, et qu'on a une loi permettant de raccorder en un seul les espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins de la variété : c'est cette loi qui définit la connexion projective de la variété. Analytiquement on choisira, d'une manière d'ailleurs arbitraire, dans l'espace projectif attaché à chaque point a de la variété, un repère définissant un système de coordonnées projectives (trilinéaires dans le cas de deux dimensions, tétraédriques dans le cas de trois dimensions, etc.). Le raccord entre les espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins a et a' se traduira analytiquement par une transformation homographique, celle qui permet de passer des coordonnées d'un point m' de l'espace projectif attaché au point a' aux coordonnées de celui des points m de l'espace projectif attaché au point a qui coïncide avec m' quand on fait le raccord des deux espaces. Naturellement on supposera que cette transformation homographique est infiniment voisine de la transformation identique. Les coefficients des formules de cette transformation définiront la connexion projective de la variété.

Les espaces projectifs rattachés en chaque point de la variété numérique considérée ne sont pas nécessairement des espaces tangents (cela donnera aux premiers lecteurs de Cartan une certaine difficulté). La formulation contemporaine se concentre sur l'utilisation des repères pour définir la connexion. En effet, si H est un groupe de Lie — nous penserons notamment aux H qui sont des stabilisateurs d'espaces homogènes — alors nous pouvons toujours imaginer H comme un certain ensemble de repères.

DÉFINITION III.1 Une paire de Cartan est la donnée de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, H, \text{Ad})$ où $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sont deux algèbres de Lie, H un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{h}$ & Ad une représentation adjointe $\text{Ad}: H \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$. Nous désignerons aussi par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une telle paire de Cartan.

Une façon générale d'obtenir une telle paire à partir de la seule donnée de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ consiste à considérer l'unique groupe simplement connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et à considérer le sous-groupe de Lie connexe $H \subset G$ correspondant à $\mathfrak{h}$. La représentation adjointe de G restreinte à H fournit la représentation adjointe désirée.

DÉFINITION III.2 (Connexion de Cartan³⁸) Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une paire de Cartan. Soit $P \rightarrow M$ un fibré H -principal (à droite), avec P & M deux variétés lisses. Nous désignons par $\mu_P: P \times H \rightarrow P$ l'action à droite lisse de ce fibré principal. Une connexion de Cartan ω_P est une 1-forme de P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que

- (1) la forme $\omega_P: TP \rightarrow \mathfrak{g}$ est injective sur chaque fibre de $TP \rightarrow P$;
- (2) avec π_H & π_P les projections canoniques du produit $P \times H$, nous avons

$$\mu_P^* \omega_P = \pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}^{-1}) \pi_P^* \omega_P. \quad (98)$$

Si ω_P est surjective sur $\mathfrak{g}$ sur chaque fibre de $TP \rightarrow P$ alors nous dirons que ω_P est une connexion de Cartan stricte³⁹.

36. [Car24b] CARTAN, « Sur les variétés à connexion projective », 1924.

37. Le premier mémoire de 1923 de Cartan a lui-même une formulation en des mots comparables. Mais il nous a semblé que la formulation de la présente citation permettait d'abstraire momentanément l'influence de la physique, de l'espace euclidien et de la géométrie riemannienne pour se concentrer sur les idées de Cartan.

38. Nous pourrions comparer cette définition avec celle que propose SHARPE dans son livre [Sha97].

39. C'est une hypothèse généralement prescrite pour toutes les formes de Cartan dans la littérature classique.

Il n'est pas inutile de rappeler le fait que lors de l'étude des groupes de Lie et des espaces homogènes, nous en étions venus à observer que si μ_G désigne le produit, alors

$$\mu_G^* \omega_G = \pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G. \quad (99)$$

Bien sûr, les formes de Maurer-Cartan avec les espaces homogènes fournissent de telles connexions de Cartan.

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{\omega_G} & \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \\ G & & \\ \downarrow & & \\ G/H & & \end{array} \quad (100)$$

Dans la littérature, la définition des connexions de Cartan est un peu différente, mais le résultat suivant montre l'équivalence avec notre formulation.

PROPOSITION III.3 *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une paire de Cartan, $P \rightarrow M$ un fibré H -principal à droite & ω_P une 1-forme de P à valeurs dans $\mathfrak{g}$ injective sur chaque fibre de $TP \rightarrow P$. La formule*

$$\mu_P^* \omega_P = \pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}^{-1}) \pi_P^* \omega_P. \quad (101)$$

est équivalente aux deux faits suivants :

- (1) *pour tout $h \in H$, $R_h^* \omega_P = \text{Ad}(h^{-1}) \omega_P$;*
- (2) *si $v \in \mathfrak{h}$, alors le champ de vecteur V sur P — en un sens invariant par H — défini par $V_p = (\mu_*)_{(p,e)}(0, v)$ vérifie $\omega_P(V_p) = v$.*

PREUVE Supposons que ω_P vérifie la formule. Pour tout $(p, h) \in P \times M$, nous avons $\mu_P(p, h) = R_h(p)$. Ainsi, évaluer $d\mu_P$ en $(u, 0)$ correspond à évaluer $(R_h)_*$ en u . Nous avons bien

$$R_h^* \omega_P(u) = \mu_P^* \omega_P(u, 0) = \omega_H(0) + \text{Ad}(h)^{-1} \omega_P(u) = \text{Ad}(h)^{-1} \omega_P(u). \quad (102)$$

Le second énoncé découle lui aussi d'une évaluation de $d\mu_P$ mais cette fois-ci en $(0, v)$. Si nous sommes basés en (p, e) , nous avons bien

$$\mu_P^* \omega_P(0, v) = v + \text{Ad}(e)^{-1}(0) = v. \quad (103)$$

Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que la formule est vraie sur les vecteurs tangents $(0, v)$, puisque l'évaluation sur un couple $(u, 0)$ est déjà contrôlée par la première condition. La seconde condition donne l'évaluation en $(0, v)$ si v est basé en $e \in H$.

Mais puisque $\mu(p, h) = \mu(ph, e) = \mu \circ (R_h \times \text{id})(p, e)$:

$$\omega_P d\mu_{(p,h)}(0, v_h) = \omega_P d\mu_{(ph,e)} d(R_h \times \text{id})_{(p,e)}(0, \omega_H(v_h)) \quad (104)$$

$$= \omega_P d\mu_{(ph,e)}(0, \omega_H(v_h)) = v_h. \quad (105)$$

Cela conclut la preuve de l'équivalence des deux définitions. $\mathbb{X}$

DÉFINITION III.4 (Espace généralisé) *Soit M une variété lisse. Un espace généralisé sur M modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est la donnée d'un fibré H -principal (à droite) $P \rightarrow M$ & d'une connexion de Cartan ω_P de ce fibré.*

Reprenons le texte de Cartan cité précédemment. Si M est une variété lisse et si H est l'ensemble des repères considéré, alors la donnée d'une copie de H en chaque point de M correspond à la donnée d'un fibré $P \rightarrow M$ où la fibre est H . Bien sûr, H est transitif sur lui-même et ce principe de symétrie — le choix d'un repère n'influe pas par rapport au choix d'un autre — donne une structure de fibré H -principal à droite, où l'action transitive considérée de H sur lui-même est l'action à droite.

Pour effectuer le raccord entre deux repères $p_1, p_2 \in P$ « infiniment voisins », Cartan demande à ce qu'une transformation du groupe G envoie p_1 sur p_2 . Un point infinitésimalement proche de $p_1 - p_2 \in T_{p_1} P$ — peut être écrit $(p_1, v) \in TP$ (avec v tangent en p_1). Cela définit une valeur $\omega_P(p_1, v) \in \mathfrak{g}$. Si cela est possible partout dans TP , cela

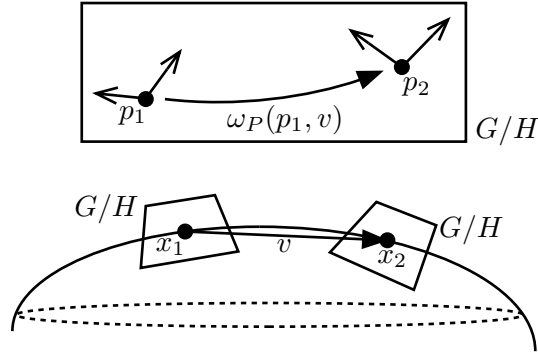


FIGURE 4 : Connexion de Cartan.

donne précisément une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (comme notre connexion de Cartan). Remarquons que le rapport entre $\omega_P(p_1, v)$ et la transformation du groupe G est donnée par l'exponentielle, $\exp(\omega_P(p_1, v))$, mais puisque cette transformation est infiniment proche de l'identité de G , il fait sens de regarder la valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Cette forme est nécessairement injective sur $T_{p_1}P$, puisque géométriquement, il ne peut pas y avoir de transformation de G envoyant p_1 sur deux points distincts. Cela justifie notre première hypothèse sur les connexions de Cartan.

La deuxième hypothèse de notre définition explique de quelle façon (au niveau infinitésimal) H agit sur le fibré. La raison de cette hypothèse est la suivante. En suivant l'interprétation de Cartan, $\omega_P(p, v)$ est la loi de changement de repère dans le raccordement en un même espace homogène des espaces rattachés en $\pi(p)$ et $\pi_*(p, v)$ qui sont infiniment proches dans M . Cependant, dans notre définition, ω_P est une fonction de TP , et demande donc le choix d'un repère — ou en d'autres termes d'un élément de la fibre — au-dessus du point de M . Lorsque Cartan écrit «Analytiquement on choisira, d'une manière d'ailleurs arbitraire, [...] un repère» cela signifie que le choix du repère n'influe pas sur la transformation $\omega_P(p, v)$. En d'autres termes, la variation due à un changement de repère, qui est essentiellement expliquée par la dérivée $\mu_P^* \omega_P$, doit être de la même forme que dans le cas de l'espace généralisé canonique (l'espace homogène), à savoir donc $\mu_G^* \omega_G$, ce qui est effectivement notre hypothèse.

Il résulte naturellement de ce qui précède que la connexion projective de la variété peut être définie analytiquement d'une infinité de manières différentes suivant le choix des repères attachés aux différents points de la variété; on peut même — et il y a souvent avantage à procéder ainsi — choisir en chaque point un repère dépendant de paramètres arbitraires; les composantes analytiques de la connexion projective dépendent alors de ces paramètres. Si le repère est choisi de la manière la plus générale possible, celles des fonctions des composantes de la connexion projective qui sont indépendantes des paramètres fournissent une définition analytique *intrinsèque* de la connexion projective^{40 41}.

À présent, nous allons définir la quantité géométrique centrale d'un espace généralisé : sa courbure.

DÉFINITION III.5 Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ & de connexion de Cartan ω_P . La courbure de cet espace généralisé est la 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$

$$\Omega = d\omega_P + \frac{1}{2}[\omega_P \wedge \omega_P]. \quad (106)$$

Si $\Omega = 0$, alors nous dirons que l'espace généralisé est plat. Si $\Omega = 0$ & si ω_P est stricte alors nous dirons que l'espace généralisé est localement homogène.

40. C'est ainsi que si la connexion euclidienne d'une variété de Riemann est définie en partant de la notion du parallélisme de M. Levi-Civita, cette connexion est définie complètement par le ds^2 de la variété. (Note de Cartan.)

41. [Car24b] CARTAN, « Sur les variétés à connexion projective », 1924.

III.1 ESPACE GÉNÉRALISÉ LOCALEMENT HOMOGÈNE

L'appellation *localement homogène* est aussi employée pour désigner le phénomène suivant.

PROPOSITION III.6 *Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ provenant d'une paire de groupes de Lie (G, H) . Si M est localement homogène, alors il existe un difféomorphisme local*

$$D: \widetilde{M} \rightarrow G/H. \quad (107)$$

PREUVE Désignons par $\pi_1: \widetilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . Nous construisons un nouveau fibré $\widetilde{P}$ par tiré-en-arrière :

$$\widetilde{P} = \{(p, x) \in P \times \widetilde{M} \mid \pi_P(p) = \pi_1(x)\}. \quad (108)$$

Nous avons les applications naturelles (de projection) $\widetilde{\pi}_1: \widetilde{P} \rightarrow P$ et $\pi_{\widetilde{P}}: \widetilde{P} \rightarrow \widetilde{M}$. Une connexion de Cartan est naturellement donnée sur $\widetilde{P}$ par $\omega_{\widetilde{P}} = \widetilde{\pi}_1^* \omega_P$.

$$\begin{array}{ccccc} T\widetilde{P} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_{1*}} & TP & \xrightarrow{\omega_P} & \mathfrak{g} \xleftarrow{\omega_G} TG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{P} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_1} & P & & G \\ \downarrow \pi_{\widetilde{P}} & & \downarrow \pi_P & & \downarrow \pi_G \\ \widetilde{M} & \xrightarrow{\pi_1} & M & & G/H \end{array} \quad (109)$$

Puisque ω_P vérifie l'équation structurelle, c'est aussi le cas de $\omega_{\widetilde{P}}$. Pour tout chemin $c: [0, 1] \rightarrow \widetilde{P}$ et un point base $g \in G$, il existe un développement de ce chemin $D_G(c)$ tel que $D_G(c)(0) = g$. Le point final de $D_G(c)$ ne dépend pas de la classe d'homotopie de c à extrémités fixées.

Soit $z \in M$ un point base de M et $x \in \widetilde{M}$ un point base dans $\widetilde{M}$ dans la fibre de z . Soit $p \in \widetilde{P}$ un point base de P et g un point base de G . Voyons $\widetilde{M}$ comme l'ensemble des chemins de M basés en z et modulo homotopie à extrémités fixées. Soit $w \in \widetilde{M}$ et $\delta: [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$ un chemin basé en x et finissant en w .

Considérons $\widetilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow P$ un relevé quelconque de ce chemin basé en p . Regardons la valeur $\pi_G(D_G(\widetilde{\delta})(1))$. Nous voulons que cette valeur définisse $D(w)$ avec $D: \widetilde{M} \rightarrow G/H$ la développante recherchée. Cela est vrai par les faits suivants.

- (1) Si δ' est un autre chemin de x à w (nécessairement homotope à δ) et si $\widetilde{\delta}'$ est un relevé de δ' lui aussi basé en p et homotope à $\widetilde{\delta}$, alors $\pi_G(D_G(\widetilde{\delta})(1)) = \pi_G(D_G(\widetilde{\delta}')(1))$ par développement des homotopies.
- (2) Si $\widetilde{\delta}'$ est un autre relevé de δ dans P (non nécessairement homotope à $\widetilde{\delta}$), alors (par passage à des trivialisations locales) il existe une application $\psi: [0, 1] \rightarrow H$ telle que $\widetilde{\delta}'(t) = \widetilde{\delta}(t)\psi(t)$. En vertu du prochain lemme $D_G(\widetilde{\delta}') = D_G(\widetilde{\delta})\psi$ et donc $\pi_G(D_G(\widetilde{\delta}')(1)) = \pi_G(D_G(\widetilde{\delta})(1))$.
- (3) Les développements ayant été pris tels que $D_G(\widetilde{\delta})^* \omega_G = \omega_{\widetilde{P}}$, puisque M a une connexion de Cartan stricte, c'est aussi le cas de $\omega_{\widetilde{P}}$ et donc la développante D construite est un difféomorphisme local.

Il nous reste donc à démontrer le lemme qui suit. Cela conclura la preuve de la proposition. ⌘

LEMME III.7 Prenons les notations précédentes. Soit $\widetilde{\delta}: [0, 1] \rightarrow P$ un chemin et $D_G(\widetilde{\delta})$ un développement. Soit $h \in H \subset G$ et soit $\psi: [0, 1] \rightarrow H$ un chemin lisse. Alors pour tout $p \in P$, $D_G(\widetilde{\delta}\psi) = D_G(\widetilde{\delta})\psi$.

PREUVE Dérivons les deux développements. Si leurs dérivées sont égales, alors cela montrera qu'ils sont égaux. Notons μ_G le produit du groupe G et $\mu_{\widetilde{P}}$ l'action à droite

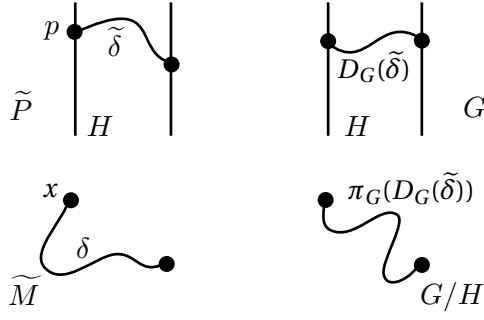


FIGURE 5 : Construction de la développante $D: \widetilde{M} \rightarrow G/H$.

du fibré $\widetilde{P}$.

$$D_G(\mu_P(\tilde{\delta}, \psi))^* \omega_G = \mu_{\widetilde{P}}(\tilde{\delta}, \psi)^* \omega_{\widetilde{P}} \quad (110)$$

$$= (\tilde{\delta} \times \psi)^* \mu_{\widetilde{P}}^* \omega_{\widetilde{P}} \quad (111)$$

$$= (\tilde{\delta} \times \psi)^* \left(\pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}^{-1}) \pi_{\widetilde{P}}^* \omega_{\widetilde{P}} \right) \quad (112)$$

$$= \omega_H(\psi_*) + \text{Ad}(\psi)^{-1} \tilde{\delta}^* \omega_{\widetilde{P}}, \quad (113)$$

$$\mu_G(D_G(\tilde{\delta}), \psi)^* \omega_G = (D_G(\tilde{\delta}) \times \psi)^* \mu_G^* \omega_G \quad (114)$$

$$= (D_G(\tilde{\delta}) \times \psi)^* \left(\pi_2^* \omega_G + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_G \right) \quad (115)$$

$$= \omega_G(\psi_*) + \text{Ad}(\psi)^{-1} D_G(\tilde{\delta})^* \omega_G \quad (116)$$

$$= \omega_H(\psi_*) + \text{Ad}(\psi)^{-1} \tilde{\delta}^* \omega_{\widetilde{P}}. \quad (117)$$

Le calcul conclut bien la preuve. $\square$

Une façon d'affiner ce résultat consiste à examiner lorsque la développante $D: \widetilde{M} \rightarrow G/H$ est un revêtement. Si nous supposons de plus que G/H est simplement connexe, alors cela montre que c'est le revêtement universel de M . Nous aimerions pouvoir montrer que

$$M \cong \Gamma \backslash G/H, \quad (118)$$

pour un certain sous-groupe $\Gamma \subset G$ que nous penserons comme étant le groupe fondamental de M .

Pour parvenir à ce résultat, nous allons montrer l'existence d'un morphisme de groupe équivariant avec la développante, $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$. Lorsque la développante sera un difféomorphisme, cela montrera que M est bien difféomorphe au double quotient précédent.

THÉORÈME III.8 Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ provenant d'une paire de groupes de Lie (G, H) . Supposons M localement homogène.

- (1) La développante $D: \widetilde{M} \rightarrow G/H$ est un revêtement si la connexion de Cartan de M est complète.
- (2) Il existe un morphisme d'holonomie $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$ équivariant avec $D: \widetilde{M} \rightarrow G/H$, c'est-à-dire vérifiant $D(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot D(x)$.

COROLLAIRE III.9 Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ provenant d'une paire de groupes de Lie (G, H) . Supposons M localement homogène. Si la connexion de Cartan de M est complète & si G/H est simplement connexe, alors avec $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ l'image du morphisme d'holonomie, nous avons

$$M \cong \Gamma \backslash G/H. \quad (119)$$

PREUVE Le premier énoncé du théorème se démontre de la façon suivante. Puisque la développante est un difféomorphisme local, il suffit de montrer que les chemins de G/H peuvent être relevés dans $\widetilde{M}$. Considérons dans G/H une courbe donnée par

$$\gamma(t) = \pi_G(L_g \exp(tv)), \quad (120)$$

avec $g \in G$, $v \in \mathfrak{g}$ et π_G la projection de G sur G/H . Chaque courbe lisse dans G/H peut être approchée par une somme finie de morceaux de telles courbes γ . Mais comme

nous pouvons le constater, cette courbe est la projection du flot dans G d'un champ invariant à gauche. Ce champ est tiré-en-arrière dans $\tilde{P}$ et est complet par hypothèse sur la connexion de Cartan $\omega_{\tilde{P}} = \tilde{\pi}_1^* \omega_P$. Donc le flot est encore défini et se projette dans $\tilde{M}$ en un relevé de γ . Cela montre donc que la développante est un revêtement.

Pour montrer le second énoncé, il nous faut revenir à la construction de la développante D . D'une part, avec le fibré initial $P \rightarrow M$, nous avons construit le tiré-en-arrière par le revêtement universel $\pi_1: \tilde{M} \rightarrow M$ en posant

$$\tilde{P} = \{(x, p) \in \tilde{M} \times P \mid \pi_1(x) = \pi_P(p)\}, \quad (121)$$

et les projections

$$\tilde{\pi}_1(x, p) = p, \quad (122)$$

$$\pi_{\tilde{P}}(x, p) = x. \quad (123)$$

L'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$ peut être relevée à $\tilde{P}$ en posant

$$\forall \gamma \in \pi_1(M), \gamma \cdot (x, p) = (\gamma \cdot x, p). \quad (124)$$

Nous constatons en particulier que $\tilde{\pi}_1 \circ \gamma = \tilde{\pi}_1$. Ainsi,

$$\omega_{\tilde{P}} = \tilde{\pi}_1^* \omega_P = \gamma^* \tilde{\pi}_1^* \omega_P = \gamma^* \omega_{\tilde{P}}. \quad (125)$$

Ainsi, par développement sur le groupe de Lie G , pour $p \in P$ et $\gamma \in \pi_1(M)$ fixés, pour tout chemin η basé en p , si nous développons $\eta^* \omega_{\tilde{P}}$ en $e \in G$ et $(\gamma \cdot \eta)^* \omega_{\tilde{P}}$ en $ge \in G$, alors il existe un unique $\rho(\gamma) \in G$ tel que

$$D_G(\eta^* \gamma^* \omega_{\tilde{P}}) = L_{\rho(\gamma)} D_G(\eta^* \omega_{\tilde{P}}). \quad (126)$$

En effet, les deux développements dans G sont les développements d'une même dérivée et diffèrent donc d'une translation à gauche. En particulier,

$$D_G(\gamma \cdot \eta)(1) = L_{\rho(\gamma)} D_G(\eta)(1). \quad (127)$$

Après avoir fixé $x \in \tilde{M}$, $p \in \tilde{P}$ au-dessus de x , $e \in G$ et $[e] \in G/H$ sa projection, l'application développante précédemment construite D est l'unique difféomorphisme local

$$D: \tilde{M} \rightarrow G/H \quad (128)$$

tel que $D(x) = [e]$ et tel que pour tout chemin δ dans $\tilde{M}$ basé en x ,

$$D(\delta(1)) = \pi_G(D_G(\tilde{\delta})(1)), \quad (129)$$

avec $\tilde{\delta}$ un relevé quelconque de δ dans P .

$$\begin{array}{ccccc} & (\tilde{P}, p) & \xrightarrow{\omega_{\tilde{P}}} & \mathfrak{g} & \xleftarrow{\omega_G} & (G, e) \\ & \nearrow \tilde{\delta} & & & & \nwarrow D_G(\tilde{\delta}) \\ [0, 1] & & & & & [0, 1] \\ & \searrow \delta & & & & \swarrow \pi_G(D_G(\tilde{\delta})) \\ & (\tilde{M}, x) & \xrightarrow{D} & (G/H, [e]) & & \end{array} \quad (130)$$

Pour construire le morphisme d'holonomie $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$, nous allons utiliser la translation à gauche fournie précédemment. Soit $\gamma \in \pi_1(M)$. Par l'explication précédente, si δ est un chemin de $\tilde{M}$ basé en x et si $\tilde{\delta}$ est un relevé, alors $\gamma \cdot \tilde{\delta}$ relève $\gamma \cdot \delta$ et il existe $\rho(\gamma) \in G$ tel que

$$D_G(\gamma \cdot \tilde{\delta})(1) = L_{\rho(\gamma)} D_G(\tilde{\delta})(1), \quad (131)$$

où nous avons développé $\gamma \cdot \tilde{\delta}$ en se basant en $g \in G$, pris de sorte à ce que ce soit le point final du développement de $\tilde{\gamma}$ basé en p , $\tilde{\gamma}$ étant un relevé de γ vu comme chemin entre x et $\gamma \cdot x$. Cela montre l'équivariance recherchée puisque, en prenant $q = \delta(1)$,

$$D(\gamma \cdot q) = \pi_G(D_G(\gamma \cdot \tilde{\delta})(1)) = \pi_G(L_{\rho(\gamma)} D_G(\tilde{\delta})(1)) = L_{\rho(\gamma)} D(q). \quad (132)$$

Il n'est pas difficile de constater que ρ est bien un morphisme. $\mathbb{Z}$

III.2 ESPACE GÉNÉRALISÉ NON HOLONOME

Après cette étude des espaces localement homogènes, revenons à la forme de courbure $\Omega = d\omega_P + \frac{1}{2}[\omega_P \wedge \omega_P]$ sur un espace généralisé M modelé sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. L'interprétation de la courbure selon Cartan fait suite à la réflexion suivante.

[S]oit un continuum à n dimensions et un groupe G à n variables⁴². Imaginons par la pensée attaché à chaque point du continuum un espace à groupe fondamental G auquel appartiendra ce point A ; imaginons aussi une loi permettant de raccorder entre eux les espaces attachés à deux points infiniment voisins du continuum. Grâce à cette loi, la portion du continuum infiniment voisine de A pourra être regardée comme une portion d'un espace à groupe fondamental G (et cela aux infiniment petits près du second ordre), et l'espace attaché à A pourra être appelé l'espace *tangent*⁴³ au continuum en A . Si maintenant l'on considère dans le continuum un chemin continu allant d'un point A à un point B , le raccord de l'espace tangent en B avec l'espace tangent en A pourra se faire de proche en proche le long du chemin considéré, et on pourra dire que ce raccord constitue le *développement* du chemin AB et des espaces tangents, ou si l'on veut, de la portion du continuum qui avoisine immédiatement le chemin AB , sur l'espace tangent en A . Seulement si l'on va de A en B par un autre chemin, le second développement ainsi obtenu ne coïncidera pas en général avec le premier. On peut exprimer toutes ces propriétés en disant que le continuum donné, avec la loi de raccord de proche en proche des espaces tangents, constitue un *espace non holonome à groupe fondamental G* . La non holonomie se traduit par le fait qu'en décrivant dans le continuum un contour fermé (ou cycle) partant d'un point A et y revenant, le point A et son voisinage se sont trouvés subir à l'arrivée, par rapport à leurs positions initiales, un certain déplacement (ou transformation du groupe G), qui sera dit le *déplacement associé au cycle*⁴⁴.

Suivons ce discours et considérons M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ provenant d'un espace homogène G/H . La connexion de Cartan sur M , ω_P , fournit une 1-forme de P à valeurs dans $\mathfrak{g}$. Ainsi, effectivement, nous pouvons toujours développer un chemin $c: [0, 1] \rightarrow P$ dans G . Un chemin $c: [0, 1] \rightarrow P$ développé dans G en $\delta: [0, 1] \rightarrow G$ en se basant en $e \in G$ a pour point final une certaine transformation $g \in G$. Cette transformation peut être vue comme celle qui transforme le point $c(0) \in P$ en le point $c(1) \in P$ en suivant le chemin c . En effet, infinitésimalement, nous avons

$$\delta^* \omega_G = \omega_P, \quad (133)$$

et la connexion de Cartan ω_P est précisément la loi infinitésimale de recollement. Comme l'indique Cartan, la transformation g dépend du chemin choisi. L'ensemble des transformations gh^{-1} où g, h sont deux transformations obtenues par deux chemins, est appelé *groupe d'holonomie*. La composition des chemins et l'unicité de la développante explique qu'il s'agit bien d'un groupe.

Nous remarquerons ici la grande proximité avec le groupe de monodromie. Lorsque nous développons des chemins pour investiguer l'intégrabilité (locale puis globale), nous avons vu que c'était l'équation de structure (c'est-à-dire le cas plat) qui assurait l'intégrabilité locale. L'intégrabilité globale dépendait aussi par ailleurs d'une donnée topologique, elle correspond ici au fait qu'un groupe d'holonomie peut être infinitésimalement nul mais ne pas être trivial. Infinitésimalement, le groupe d'holonomie en un point $p \in P$ est contrôlé par le développement de chemins infinitésimaux. Si ce groupe infinitésimal est nul, alors l'holonomie est discrète et l'espace est donc plat. C'est donc ce groupe infinitésimal qui interprète la courbure de P .

42. Cela signifie que G agit sur n variables, à savoir ici le continuum considéré. (Note de votre auteur.)

43. Ce terme chez Cartan n'est pas à prendre au sens aujourd'hui courant. Cet espace tangent n'est pas nécessairement l'espace tangent de la variété plongée dans un espace euclidien. Notamment parce que l'espace tangent de Cartan n'est peut-être même pas un espace vectoriel (cela peut être par exemple l'espace projectif ou conforme). (Note de votre auteur.)

44. [Car25] CARTAN, « Les groupes d'holonomie des espaces généralisés », 1925.

Considérons $p \in P$ et calculons le groupe infinitésimal immédiat d'holonomie en p par une construction explicite⁴⁵. Prenons u et v deux vecteurs tangents en p . Ils peuvent être pris comme valeurs en p de deux champs de vecteurs lisses U et V sur P . Nous cherchons à comparer les deux transformations infinitésimales (jusqu'au deuxième ordre) obtenues en suivant U puis V et en suivant V puis U .

Classiquement, le fait de suivre le flot de U puis V ou de suivre V puis U donne une différence de point d'arrivée qui est contrôlée par le crochet des deux champs de vecteurs⁴⁶. En effet, prenons $\text{id}: P \rightarrow P$ l'application identité. Alors id est une 1-forme et comme toute différentiation extérieure d'une 1-forme, nous avons :

$$0 = d^2 \text{id}(U, V) = U(\text{id}(V)) - V(\text{id}(U)) - \text{id}([U, V]) \quad (134)$$

et cela donne bien entendu $[U, V] = U(V) - V(U)$.

Ainsi, lorsque nous cherchons à comparer la transformation infinitésimale obtenue en suivant U puis V avec celle obtenue en suivant V puis U , il faudra en réalité comparer la transformation obtenue en suivant U puis V avec celle obtenue en suivant V puis U puis $[U, V]$. En d'autres termes, nous devons comparer

$$\omega_P(tU)|_p + \omega_P(sV)|_{\phi_U^t(p)} \text{ et } \omega_P(sV)|_p + \omega_P(tU)|_{\phi_V^s(p)} + \omega_P([U, V])|_p, \quad (135)$$

c'est-à-dire la quantité

$$\omega_P(tU)|_p + \omega_P(sV)|_{\phi_U^t(p)} - \left(\omega_P(sV)|_p + \omega_P(tU)|_{\phi_V^s(p)} + \omega_P([U, V])|_p \right). \quad (136)$$

Cela donne, comme nous pouvions nous y attendre (en faisant tendre t et s vers 0),

$$d\omega_P(tu, sv) = ts U(\omega_P(V))|_p - ts V(\omega_P(U))|_p - ts \omega_P([U, V])|_p. \quad (137)$$

En effet il suffit de développer l'expression qui précède avec la définition de la dérivée de Lie $U(\omega_P(V))$:

$$\omega_P(sV)|_{\phi_U^t(p)} = \omega_P(sV)|_p + t U(\omega_P(sV))|_p + o(t). \quad (138)$$

D'autre part, dans l'espace modèle, les transformations infinitésimales $\omega_P(tu)$ et $\omega_P(sv)$ ne commutent pas non plus, et donc il faut comparer $\omega_P(sv) \cdot \omega_P(tu)$ et $\omega_P(tu) \cdot \omega_P(sv) + [\omega_P(sv), \omega_P(tu)]$, ce qui revient à considérer le terme supplémentaire (qui représente le défaut de commutation de l'espace modèle)

$$- [\omega_P(sv), \omega_P(tu)] = [\omega_P(tu), \omega_P(sv)]. \quad (139)$$

Il s'ensuit que la quantité recherchée et qui indique effectivement le défaut de courbure est

$$d\omega_P(u, v) + [\omega_P(u), \omega_P(v)] = \Omega(u, v) \quad (140)$$

ce qui coïncide bien avec la définition de la courbure. Par conséquent, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME III.10 (Cartan, Ambrose-Singer) *Soit M un espace généralisé, $P \rightarrow M$ son fibré, ω_P sa connexion de Cartan & Ω sa forme de courbure. L'algèbre de Lie du groupe d'holonomie de P est engendré par*

$$\forall p \in P, \forall u, v \in T_p P, \Omega(u, v). \quad (141)$$

Le corollaire suivant nous était déjà connu : une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ qui vérifie l'équation structurelle fournit toujours une intégration locale (unique lorsqu'un point base est fixé).

45. Ce résultat s'apparente au théorème d'Ambrose-Singer. La seule véritable différence réside en le fait que nous considérons les chemins infinitésimaux basés en p , alors que le théorème d'Ambrose-Singer développe le fait que le groupe d'holonomie infinitésimal en p est aussi constitué de transformations infinitésimales basées en tout q dès que q et p sont reliables. En effet, si c est un chemin entre p et q , alors toute transformation infinitésimale h en q donne une transformation infinitésimale en p par la composition $c^{-1}hc$.

46. Une référence très intéressante à ce sujet, et qui donne de bonnes interprétations géométriques à la courbure riemannienne et au crochet de Lie est l'article de FABER [Fab76].

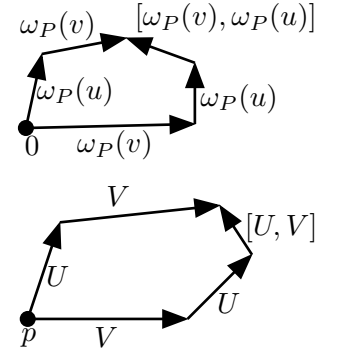


FIGURE 6: Calcul de la courbure.

COROLLAIRE III.11 *Supposons que M est un espace généralisé plat ($\Omega = 0$). Soit $p \in P$, alors il existe un ouvert U contenant p & une unique application $D: U \rightarrow G$ telle que $D^* \omega_G = \omega_P$ & $D(p) = e$.*

Précédemment, nous avons déjà remarqué que si M est un espace généralisé localement homogène, alors il existe une application développante $D: \bar{M} \rightarrow G/H$. Le corollaire précédent laisse donc penser que le passage des fibres à travers la développante d'un espace plat est compréhensible. C'est ce que nous allons inspecter à présent.

La proposition qui va suivre explique que la forme de courbure ne dépend, en un sens, pas des fibres mais uniquement du tangent de M (qui est isomorphe en chaque point à $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$).

LEMME III.12 Soit $\psi: P \rightarrow H$ une fonction lisse, et définissons $f(p) = \mu_P(p, \psi(p))$. Alors $f^* \Omega = \text{Ad}(\psi)^{-1} \Omega$.

PREUVE Par calcul,

$$f^* \omega_P = (\mu_P \times (\text{id} \times \psi))^* \omega_P \quad (142)$$

$$= (\text{id} \times \psi)^* (\pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}^{-1}) \pi_P^* \omega_P) \quad (143)$$

$$= \psi^* \omega_H + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_P, \quad (144)$$

$$f^* \Omega = df^* \omega_P + \frac{1}{2} [f^* \omega_P \wedge f^* \omega_P] \quad (145)$$

$$= d(\psi^* \omega_H + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_P) + \frac{1}{2} [(\psi^* \omega_H + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_P) \wedge (\psi^* \omega_H + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_P)] \quad (146)$$

$$= \text{Ad}(\psi)^{-1} \left(d\omega_P + \frac{1}{2} [\omega_P \wedge \omega_P] \right) + \psi^* \left(d\omega_H + \frac{1}{2} [\omega_H \wedge \omega_H] \right) \quad (147)$$

$$= \text{Ad}(\psi)^{-1} \Omega + \psi^*(0) = \text{Ad}(\psi)^{-1} \Omega. \quad (148)$$

Cela prouve le lemme. $\mathbb{X}$

PROPOSITION III.13 *La forme $\Omega(u, v)$ est nulle dès que u ou v est tangent à H .*

PREUVE Basons-nous en $p \in P$ et supposons que u est tangent à la fibre H en p . Considérons une application $\psi: P \rightarrow H$ telle que $\psi(p) = e$ et $\psi_*(u) = -(\omega_P)_p(u) \in T_e H \subset \mathfrak{g}$. Définissons $f(q) = \mu_P(q, \psi(q))$. Nous avons en p , de la même façon qu'au calcul du lemme précédent,

$$f^*(\omega_P)_p = \psi_p^* \omega_H + \text{Ad}(\psi(p))^{-1} (\omega_P)_p \quad (149)$$

$$= \psi_p^* \omega_H + (\omega_P)_p, \quad (150)$$

$$f^*(\omega_P)_p(u) = \omega_H(-(\omega_P)_p(u)) + (\omega_P)_p(u) = 0. \quad (151)$$

En vertu du lemme précédent, $\Omega(u, v) = \Omega(f_* u, f_* v) = \Omega(0, f_* v) = 0$, ce qui conclut notre preuve. $\mathbb{X}$

Suivons l'interprétation de Cartan. Si nous considérons le développement d'un lacet infinitésimal, la torsion indique si le lacet est développé en un lacet, et la courbure (classique) si le repère initial coïncide avec le repère final. En géométrie riemannienne, la connexion de Levi-Civita est une connexion affine sans torsion, de sorte que le développement parallèle donne effectivement un développement de chemins qui transforme les lacets en lacets et où le changement du vecteur tangent au point base indique la courbure riemannienne de la variété.

DÉFINITION III.14 Soit $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ l'application de passage au quotient. Si $\pi(\Omega) = 0$, alors nous dirons que l'espace généralisé M est sans torsion.

Avant de passer au cas réductif, démontrons la proposition suivante, dont un corollaire interviendra plus tard et qui généralise les identités de Bianchi.

PROPOSITION III.15 (Identité de Bianchi) *La courbure $\Omega = d\omega_P + \frac{1}{2} [\omega_P \wedge \omega_P]$ vérifie*

$$d\Omega = [\Omega \wedge \omega_P]. \quad (152)$$

PREUVE Par définition de la courbure Ω :

$$d\Omega = d^2\omega_P + \frac{1}{2} d[\omega_P \wedge \omega_P] \quad (153)$$

$$= 0 + \frac{1}{2} ([d\omega_P \wedge \omega_P] - [\omega_P \wedge d\omega_P]) \quad (154)$$

$$= [d\omega_P \wedge \omega_P] \quad (155)$$

$$= \left[\left(\Omega - \frac{1}{2} [\omega_P \wedge \omega_P] \right) \wedge \omega_P \right] \quad (156)$$

$$= [\Omega \wedge \omega_P] - \frac{1}{2} [[\omega_P \wedge \omega_P] \wedge \omega_P] \quad (157)$$

$$= [\Omega \wedge \omega_P]. \quad (158)$$

En effet, $[[\omega_P \wedge \omega_P] \wedge \omega_P] = 0$ ⁴⁷, ce qui conclut la preuve. $\mathbb{N}$

Supposons de plus à présent que la paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ soit réductive : il existe $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ qui soit $\text{Ad}(H)$ -invariant. Cela revient à considérer que si M est modelé sur (G, H) alors l'espace homogène sous-jacent est réductif. La décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \quad (159)$$

induit deux décompositions :

$$\omega_P = \omega_{\mathfrak{p}} \oplus \omega_{\mathfrak{h}}; \quad (160)$$

$$\text{et } \Omega = \Omega_{\mathfrak{p}} \oplus \Omega_{\mathfrak{h}}. \quad (161)$$

En interprétant $\mathfrak{p}$ comme étant l'algèbre du sous-groupe des translations de l'espace homogène sous-jacent, et $\mathfrak{h}$ comme celui des rotations, nous dirons en suivant l'interprétation de Cartan que $\Omega_{\mathfrak{p}}$ est la *torsion* de l'espace généralisé et que $\Omega_{\mathfrak{h}}$ est sa *courbure classique*.

COROLLAIRE III.16 *Si l'espace généralisé M est sans torsion ($\Omega_{\mathfrak{p}} = 0$) alors nous avons les deux identités de Bianchi :*

$$[\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{p}}] = 0, \quad (162)$$

$$[\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}] = d\Omega_{\mathfrak{h}}. \quad (163)$$

PREUVE Par l'identité de Bianchi, $d\Omega = [\Omega \wedge \omega_P]$ et puisque $\Omega_{\mathfrak{p}}$ est nul,

$$d\Omega_{\mathfrak{h}} = [\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge (\omega_{\mathfrak{p}} + \omega_{\mathfrak{h}})] = [\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{h}}] + [\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{p}}]. \quad (164)$$

Il reste à montrer $[\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{p}}] = 0$.

$$[\Omega_{\mathfrak{h}} \wedge \omega_{\mathfrak{p}}](X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \pm [\Omega_{\mathfrak{h}}(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \omega_{\mathfrak{p}}(X_{\sigma(3)})] \quad (165)$$

Puisque $\mathfrak{p}$ est $\text{Ad}(H)$ -invariant, cela implique infinitésimalement que $\text{ad}(\mathfrak{h})(\mathfrak{p}) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$. Mais $d\Omega_{\mathfrak{p}} = 0$ et donc tous les crochets de la somme sont nuls. En effet, en prenant un X_i dans $\mathfrak{p}$ et les autres X_j dans $\mathfrak{h}$, il ne reste de la somme qu'un seul terme pour lequel $\omega_{\mathfrak{p}}(X_{\sigma(3)})$ est non nul. Ces triplets fournissent une base et donc l'expression est bien constamment nulle. $\mathbb{N}$

Un phénomène que nous devons mentionner consiste à étudier les espaces généralisés dont la courbure, même si elle n'est pas nulle, est constante. Lorsque cela est le cas, nous verrons comment *muter* le modèle $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ afin d'obtenir un espace généralisé plat et géométriquement identique.

DÉFINITION III.17 *Soient $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}, H, \text{Ad}_1)$ & $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}, H, \text{Ad}_2)$ deux paires de Cartan pour un même groupe H . Nous dirons que la seconde est une mutante de la première s'il existe une application de mutation $\lambda: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ qui soit un isomorphisme linéaire tel que :*

- (1) *pour tout $h \in H$ & $u \in \mathfrak{g}_1$, $\lambda(\text{Ad}_1(h)u) = \text{Ad}_2(h)\lambda(u)$;*
- (2) *lorsqu'elle est restreinte à $\mathfrak{h}$, $\lambda|_{\mathfrak{h}}$ est l'application identité;*
- (3) *pour tous $u, v \in \mathfrak{g}_1$, $\lambda[u, v]_{\mathfrak{g}_1} = [\lambda(u), \lambda(v)]_{\mathfrak{g}_2}$ modulo $\mathfrak{h}$.*

⁴⁷. Cela se justifie en réalité par un calcul explicite en utilisant l'identité de Jacobi.

Les exemples les plus importants de mutations sont les suivants. À partir de l'espace euclidien, l'espace hyperbolique et l'espace sphérique sont tous deux des mutations de l'espace euclidien. Pour comprendre, dans un esprit d'analyse-synthèse, quelle est la mutation à effectuer à partir d'un espace généralisé à courbure constante, regardons l'énoncé suivant.

PROPOSITION III.18 *Soit M un espace généralisé modelé sur la paire de Cartan $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}, H, \text{Ad}_1)$. Soit $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}, H, \text{Ad}_2)$ une mutante de la première paire, avec la mutation $\lambda: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$. Soit ω_1 la connexion de Cartan de M . Alors*

$$\omega_2 = \lambda \circ \omega_1 \quad (166)$$

définit une connexion de Cartan sur M qui est alors un espace généralisé pour la paire de Cartan $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}, H, \text{Ad}_2)$. De plus, nous avons que ω_2 est complète si, & seulement si, c'est le cas de ω_1 & que la courbure de ω_2 est donnée par

$$\Omega_2 = \lambda \circ \Omega_1 + \frac{1}{2} ([\omega_2 \wedge \omega_2] - \lambda \circ [\omega_1 \wedge \omega_1]). \quad (167)$$

PREUVE Regardons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\omega_1} & \mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g}_2 \\ \downarrow \pi_P & & \\ M & & \end{array} \quad (168)$$

Le fibré principal $\pi_P: P \rightarrow M$ est le même, et a toujours pour fibre H . Il s'agit de vérifier que ω_2 est bien une connexion de Cartan.

Si la forme ω_1 est injective, alors puisque λ est un isomorphisme linéaire, c'est encore le cas de ω_2 . D'autre part,

$$\mu_P^* \omega_2 = \lambda \circ \mu_P^* \omega_1 \quad (169)$$

$$= \lambda \circ (\pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}_1^{-1}) \pi_P^* \omega_1) \quad (170)$$

$$= \pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}_2^{-1}) \pi_P^* \omega_2. \quad (171)$$

Donc ω_2 est bien une connexion de Cartan.

La courbure se calcule directement par définition.

$$\Omega_2 = d\omega_2 + \frac{1}{2} [\omega_2 \wedge \omega_2] \quad (172)$$

$$= \lambda \circ d\omega_2 + \frac{1}{2} [\omega_2 \wedge \omega_2] \quad (173)$$

$$= \lambda \circ \left(\Omega_1 - \frac{1}{2} [\omega_1 \wedge \omega_1] \right) + \frac{1}{2} [\omega_2 \wedge \omega_2] \quad (174)$$

$$= \lambda \circ \Omega_1 + \frac{1}{2} ([\omega_2 \wedge \omega_2] - \lambda \circ [\omega_1 \wedge \omega_1]) \quad (175)$$

Cela conclut la preuve. $\square$

D'après cette proposition et la troisième hypothèse de la définition qui la précède, si nous regardons à travers la projection $\pi_T: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (qui donne donc la torsion de la courbure), nous avons

$$\pi_T \Omega_2(X, Y) = \pi_T (\lambda \Omega_1(X, Y) + [\omega_2(X), \omega_2(Y)] - \lambda \circ [\omega_1(X), \omega_1(Y)]) \quad (176)$$

$$= \pi_T (\lambda \Omega_1(X, Y) + [\omega_2(X), \omega_2(Y)] - [\omega_2(X), \omega_2(Y)]) \quad (177)$$

$$= \pi_T \lambda \Omega_1(X, Y). \quad (178)$$

DÉFINITION III.19 *Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Nous dirons que M est de courbure constante si la composition $\pi_T \Omega$ est nulle & si pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$*

$$\Omega_p(\omega_p^{-1}(u)_p, \omega_p^{-1}(v)_p) \quad (179)$$

ne dépend pas de p .

Si $\pi_T \Omega$ est nulle, alors cela signifie que $\Omega_p(\omega_p^{-1}(u)_p, \omega_p^{-1}(v)_p)$ appartient toujours à $\mathfrak{h}$. Lorsque la courbure est nulle, posons $K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ définie par

$$K(u, v) = \Omega_p(\omega_p^{-1}(u)_p, \omega_p^{-1}(v)_p). \quad (180)$$

THÉOREME III.20 Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h})$. Si M est de courbure constante, alors il existe une mutante $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h})$ telle que M est plate sur cette nouvelle structure. De plus, nous pouvons prendre la mutation $\text{id}: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ avec le crochet

$$[u, v]_{\mathfrak{g}_2} = [u, v]_{\mathfrak{g}_1} - K(u, v). \quad (181)$$

PREUVE Considérons tout d'abord l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$ définie par le crochet donné. Le crochet est bien bilinéaire. Il est également anti-symétrique car la forme de courbure Ω l'est. L'identité de Jacobi se justifie par un calcul en reprenant la formule de Bianchi et la définition de Ω ⁴⁸.

Montrons que $[\text{Ad}(h)u, \text{Ad}(h)v]_{\mathfrak{g}_2} = \text{Ad}(h)[u, v]_{\mathfrak{g}_2}$. Cela se déduit en fait de l'égalité

$$K(\text{Ad}(h)u, \text{Ad}(h)v) = \text{Ad}(h)K(u, v). \quad (182)$$

Cela provient du calcul suivant. Prenons $U = \omega_1^{-1}(u)$ et $V = \omega_1^{-1}(v)$.

$$K(u, v) = \Omega(U, V)_p \quad (183)$$

$$= \Omega(U, V)_{ph} \quad (184)$$

$$\Omega(U, V)_{ph} = (\mu_P \circ (\text{id} \times \{h\}))^* \Omega(\text{Ad}(h)U, \text{Ad}(h)V)_p \quad (185)$$

$$= \text{Ad}(h)^{-1} \Omega(\text{Ad}(h)U, \text{Ad}(h)V)_p \quad (186)$$

Enfin, vérifions que M est plate pour la nouvelle connexion $\omega_2 = \text{id} \circ \omega_1$ de Cartan, avec $\text{id}: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$.

$$\Omega_2 = \text{id} \circ \Omega_1 + \frac{1}{2} ([\omega_2 \wedge \omega_2]_{\mathfrak{g}_2} - \text{id} \circ [\omega_1 \wedge \omega_1]_{\mathfrak{g}_1}) \quad (187)$$

$$\Omega_2(U, V) = K(u, v) + ([u, v]_{\mathfrak{g}_2} - [u, v]_{\mathfrak{g}_1}) \quad (188)$$

$$= [u, v]_{\mathfrak{g}_2} - ([u, v]_{\mathfrak{g}_1} - K(u, v)) = 0 \quad (189)$$

Cela montre bien que M est plate. $\mathbb{X}$

Terminons par la construction des géodésiques de Cartan. Il s'agit simplement de développer des chemins et de retenir ceux qui sont des géodésiques de l'espace homogène. Tout comme dans le cas des espaces homogènes, il nous faut une hypothèse de réductibilité. Cela nous permet en effet de développer des chemins de M en les voyant comme des chemins de P . Cette association est unique en spécifiant que les chemins de P soient horizontaux.

LEMME III.21 Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une paire de Cartan réductive & soit M un espace généralisé modelé sur cette paire. Pour tout chemin lisse $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ & $p \in P$ un relevé de $\gamma(0)$, il existe un unique chemin lisse horizontal $\delta: [0, 1] \rightarrow P$ tel que $\pi_P(\delta) = \gamma$. Nous appelons δ le relevé horizontal de γ .

PREUVE La projection $\pi: P \rightarrow M$ induit un morphisme au tangent

$$d\pi_p: T_p P \rightarrow T_x M. \quad (190)$$

Ce morphisme est surjectif. D'autre part,

$$\omega_P(p): T_p P \rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \quad (191)$$

avec $\mathfrak{p}$ un supplémentaire fourni par la réductibilité. Nécessairement, puisque ω_P est surjective sur $\mathfrak{h}$, il existe un sous-espace horizontal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ tel que

$$\text{Im } \omega_P(p) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}. \quad (192)$$

La dimension de $\mathfrak{m}$ est la même que celle de $T_x M$.

Si $v \in T_x M$, alors il existe un unique vecteur $u \in \mathfrak{m}$ tel que $d\pi_p(\omega_P^{-1}(u)) = v$. En prenant $u = \dot{\gamma}(0)$, et en intégrant progressivement, cela fournit un unique chemin δ comme désiré. $\mathbb{X}$

DÉFINITION III.22 Soit M un espace généralisé modelé sur une paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ provenant d'un espace homogène réductif G/H . Une courbe $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ est géodésique si, avec δ son relevé horizontal, $\pi_G(D_G(\delta))$ est géodésique dans G/H .

48. Nous pourrions consulter par exemple [Sha97, p. 222-223].

Traduisons cette définition en d'autres termes, ce qui fera office de transition. Désignons par $\omega_{\mathfrak{h}}$ la projection sur $\mathfrak{h}$ ⁴⁹. La courbe δ est géodésique si $\omega_P(\delta_*)$ est constant et si $\omega_{\mathfrak{h}}(\delta_*) = 0$.

IV — DÉRIVATION COVARIANTE

La dérivation covariante est un outil géométrique et analytique très fort. Il permet par exemple de comparer un ensemble de champ de vecteurs à un ensemble de champs de vecteurs invariants à gauche. Nous avons fait cette remarque au début du chapitre.

À la fin de la section précédente, nous en sommes arrivés à dire qu'une géodésique est une courbe δ telle que $\omega_{\mathfrak{h}}(\dot{\delta}) = 0$ et $\omega_P(\dot{\delta})$ est constante. Nous pourrions traduire cela par les faits que δ soit horizontale et que $\dot{\delta}(\omega_P(\dot{\delta})) = 0$, ce qui ressemble évidemment à la définition classique $\nabla_{\dot{\delta}}(\dot{\delta}) = 0$ lorsque nous avons à disposition une connexion affine ∇ .

À partir d'une connexion de Cartan ω_P sur un espace réductif, il n'est pas difficile de définir l'opération $X(\omega_P(Y))$ et de constater qu'il s'agit presque d'une connexion affine au sens usuel. Cependant, il est moins aisé de vérifier que la torsion et la courbure de cette opération (au sens usuel) sont bien la torsion et courbure classique de la courbure de la connexion de Cartan initiale. C'est le but de cette section que de vérifier cette affirmation, en commençant par le cas affine, puis en généralisant aux espaces homogènes réductifs.

IV.1 CONNEXION AFFINE

DÉFINITION IV.1 Soit M une variété lisse & désignons par $\Gamma(TM)$ ses champs de vecteurs lisses. Une connexion affine sur M est la donnée d'un opérateur bilinéaire

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM) \quad (193)$$

vérifiant les conditions suivantes :

- (1) pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y$;
- (2) pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y$.

Étant donnée une connexion affine, nous définissons sa torsion par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (194)$$

& sa courbure (classique) par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \nabla_X(Z) - \nabla_{[X, Y]}(Z). \quad (195)$$

Le terme *connexion* est employé pour exprimer le phénomène suivant. Si x, y sont deux vecteurs tangents en p , vus comme valeurs en p des champs X et Y , alors $\nabla_X Y$ donne une façon d'exprimer comment évolue le champ Y dans la direction X . Nous parlons aussi de *dérivée covariante*. Cette possibilité de dériver un champ le long d'un autre est tout à fait remarquable. En effet, en général, il n'y a pas de façon canonique de dériver un champ de vecteurs tangent en un objet géométrique encore tangent à la variété (nous pourrions par exemple penser au fait que l'accélération le long d'une trajectoire circulaire est normale au cercle et non tangent à lui). Avoir une connexion permet de *connecter* les espaces tangents (vectoriels) en un seul afin de pouvoir déterminer des variations de vecteurs tangents.

Le fait de pouvoir dériver un champ par rapport à un autre, en ayant à l'idée le fait que nous avons en fait le moyen de comparer deux espaces tangents, permet de définir un *parallélisme* de la façon suivante. Si, pour $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\nabla_X Y = 0$, alors nous dirons que X et Y sont *parallèles*.

Une classe tout à fait fondamentale de connexions affines est celle des connexions de Levi-Civita.

⁴⁹. Une telle connexion est appelé dans la littérature une *connexion d'Ehresmann*.

DÉFINITION IV.2 Soit M une variété lisse de plus munie d'une métrique pseudo-riemannienne ou riemannienne. La connexion de Levi-Civita est l'unique connexion affine sans torsion compatible avec la métrique :

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle. \quad (196)$$

On peut imaginer, en chaque point d'un espace de Riemann, un *espace euclidien* (fictif) *tangent*, dont ce point et les points infiniment voisins font partie; la définition du parallélisme de M. Levi-Civita permet alors de raccorder en un seul les espaces euclidiens tangents en deux points infiniment voisins quelconques; autrement dit, elle confère à l'espace de Riemann une *connexion euclidienne*. Si l'on considère dans l'espace de Riemann une ligne continue AB , on peut raccorder de proche en proche en un seul les espaces euclidiens tangents aux différents points de AB ; par suite aussi, aux infiniment petits près du second ordre, tous les points de l'espace de Riemann voisins de la ligne AB viendront, par cette espèce de *développement*, se localiser dans l'espace euclidien tangent en A .

[...]

Comme on le voit, la notion de parallélisme de M. Levi-Civita permet d'assimiler à un vrai espace euclidien, ou du moins à une portion de cet espace, toute la région d'un espace de Riemann qui avoisine un arc de courbe quelconque AB tracé dans l'espace donné ⁵⁰.

Cette manière d'envisager la notion de parallélisme est, je crois, celle qui va le mieux au fond des choses. Ce serait restreindre sa portée que de n'y voir, comme on l'a fait en général, qu'un procédé de comparaison des vecteurs issus de deux points infiniment voisins; il faut y voir au contraire un moyen d'introduire dans un espace de Riemann toute la gamme des déplacements de l'espace euclidien, du moins en ce qui concerne les effets qu'ils produisent dans une région infiniment petite de l'espace.

Le point de vue habituel permet la fondation de la géométrie affine non holonome, parce que la notion de l'équipollence ⁵¹ de deux vecteurs a un sens dans l'espace affine; le second point de vue permet la fondation de la géométrie projective ou de la géométrie conforme non holonomes, bien que la notion de vecteurs équipollents n'ait aucun sens dans l'espace projectif et que la notion elle-même de vecteur n'ait aucun sens dans l'espace conforme ⁵².

Il faut comprendre ici que Cartan (alors que ce sont les débuts de sa nouvelle théorie géométrique) tente de justifier son approche qui demande une loi de raccordement infinitésimal entre deux espaces modèles rattachés en deux points infiniment proches d'une variété. Ce que Cartan souligne, et que nous retiendrons, c'est que là où une connexion *affine* fait sens car l'espace tangent est lui-même affine (vectoriel), cela n'est pas le cas en général. Dans l'espace conforme ou projectif, cela ne fait pas sens de parler de vecteurs (car ces espaces ne sont pas vectoriels) et donc les connexions affines n'ont pas lieu d'être. Ce que Cartan en tire, c'est que sa notion est plus générale, et pourtant identique aux connexions affines dans le cas idoine.

DÉFINITION IV.3 Considérons la paire de Cartan $(\text{aff}_n, \mathfrak{gl}_n)$ issue de l'espace homogène — que nous appelons espace affine —

$$\text{Aff}_n = \text{GL}_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n / \text{GL}_n(\mathbf{R}). \quad (197)$$

L'espace affine est naturellement réductif:

$$\text{aff}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{gl}_n. \quad (198)$$

Cette réduction va nous permettre de réutiliser les interprétations établies précédemment sur la décomposition d'une courbure Ω d'un espace généralisé modelé sur un espace homogène réductif.

Remarquons également, par une interprétation élémentaire de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$, que nous pouvons voir le fibré principal d'un espace généralisé modelé sur l'espace affine comme le *fibré des repères*. Dans le cas des connexions euclidiennes — qui correspondent en

50. [Car24a] CARTAN, « La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle », 1924.

51. L'équipollence de deux repères consiste à dire qu'il existe une transformation du groupe fondamental (principal) transformant l'un en l'autre. (Note de votre auteur.)

52. *Ibid.*

réalité aux connexions affines métriques — nous pourrions réduire ce fibré à celui des repères orthonormaux.

Un fait à constater, et qui est tout à fait central, est le suivant. La donnée d'un fibré de repères orthonormaux prescrit déjà une métrique riemannienne sur la variété considérée. La différence entre une variété riemannienne et une variété munie d'une connexion affine métrique est la même que celle entre un fibré principal de repères orthonormaux et un espace généralisé modelé sur l'espace euclidien. En d'autres termes, dans la comparaison entre géométrie riemannienne et espaces généralisés modelés sur l'espace euclidien, le fibré principal de l'espace généralisé correspond à la métrique riemannienne, et la connexion de Cartan correspond au choix d'une connexion compatible avec la métrique. Le choix tout à fait particulier de la connexion de Levi-Civita correspond en réalité à choisir la connexion de Cartan sans torsion de cet espace.

À présent, nous allons proposer une construction permettant de transformer une connexion de Cartan en une connexion affine. L'idée et la contrainte vont consister à montrer que la courbure et la torsion de la courbure de Cartan correspond en effet à la torsion et à la courbure de la connexion affine.

Dans l'espace affine, nous avons au niveau de l'algèbre de Lie des crochets tout à fait particuliers : $[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n] = 0$, $[\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{gl}_n] \subset \mathfrak{gl}_n$ et $[\mathfrak{gl}_n, \mathbf{R}^n] \subset \mathbf{R}^n$. Remarquons au passage, que si $A \in \mathfrak{gl}_n$ et $v \in \mathbf{R}^n$, alors $[A, v]$ est égal à Av au sens des applications linéaires.

Si ω_P est une connexion de Cartan à valeurs dans $\mathfrak{aff}_n$, désignons par $\omega_{\mathbf{R}^n}$ et $\omega_{\mathfrak{gl}_n}$ la décomposition donnée par les projections. Désignons respectivement par $\Omega_{\mathbf{R}^n}$ et par $\Omega_{\mathfrak{gl}_n}$ la torsion et la courbure classique de la connexion ω_P .

Commençons par la torsion. Nous constatons les faits suivants.

$$\Omega_P(X, Y) = d\omega_P(X, Y) + [\omega_P(X), \omega_P(Y)] \quad (199)$$

$$d\omega_{\mathbf{R}^n}(X, Y) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) - Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(X)) - \omega_{\mathbf{R}^n}([X, Y]) \quad (200)$$

$$\Omega_{\mathbf{R}^n}(X, Y) = d\omega_{\mathbf{R}^n}(X, Y) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] - [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(X)] \quad (201)$$

Ainsi, si nous définissons

$$\nabla_X^\omega(Y) = X(\omega_P^{\mathbf{R}^n}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)], \quad (202)$$

il vient

$$\Omega_{\mathbf{R}^n}(X, Y) = \nabla_X^\omega(Y) - \nabla_Y^\omega(X) - \omega_{\mathbf{R}^n}([X, Y]), \quad (203)$$

ce qui est très proche de la torsion d'une connexion, à savoir, $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$.

Quant à la courbure, nous procédons aux calculs suivants. L'idée consiste à observer que la courbure au sens de Cartan est une transformation, alors que la courbure d'une connexion affine est déjà l'image d'une transformation. Appliquer une transformation infinitésimale à un vecteur consiste simplement à faire un crochet de Lie. Ainsi, nous allons étudier le crochet

$$[\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \quad (204)$$

et il n'est pas difficile de se convaincre qu'en faisant varier Z , si cette expression est toujours nulle, c'est que $\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y)$ est elle-même nulle.

$$d\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y) = X(\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y)) - Y(\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X)) - \omega_{\mathfrak{gl}_n}([X, Y]) \quad (205)$$

$$\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y) = d\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y)] \quad (206)$$

$$[\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] = [d\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \quad (207)$$

Par l'identité de Jacobi et par somme, nous obtenons le calcul suivant.

$$\begin{aligned} [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] &= [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]] \\ &\quad - [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]] \end{aligned} \quad (208)$$

$$\begin{aligned} [d\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] &= [X(\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y)), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] - [Y(\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X)), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \\ &\quad - [\omega_{\mathfrak{gl}_n}([X, Y]), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \end{aligned} \quad (209)$$

En tentant de faire correspondre les termes dans l'idée d'obtenir la forme de courbure de ∇^ω , nous procédons au calcul suivant.

$$\nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega (Z) = \nabla_X (Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]) \quad (210)$$

$$= X(Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), (Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)])] \quad (211)$$

$$X([\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]) = [X(\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y)), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))] \quad (212)$$

$$\nabla_{[X,Y]}(Z) = ([X, Y])(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}([X, Y]), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \quad (213)$$

$$= X(Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))) - Y(X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}([X, Y]), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \quad (214)$$

Ainsi nous en déduisons le fait suivant.

$$\begin{aligned} \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega (Z) - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega (Z) - \nabla_{[X,Y]}^\omega (Z) &= [\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \\ &\quad + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))] + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))] \\ &\quad - [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y), X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))] - [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), Y(\omega_{\mathbf{R}^n}(Z))] \end{aligned} \quad (215)$$

$$= [\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] \quad (216)$$

En résumé, nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME IV.4 *Soit M un espace généralisé modelé sur l'espace affine. En suivant les notations précédentes, si nous définissons*

$$\nabla^\omega : \Gamma(TP) \times \Gamma(TP) \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (217)$$

par l'expression

$$\nabla_X^\omega (Y) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (218)$$

alors la courbure & la torsion de cette pseudo-connexion affine est donnée par :

$$\nabla_X^\omega (Y) - \nabla_Y^\omega (X) - \omega_{\mathbf{R}^n}([X, Y]) = \Omega_{\mathbf{R}^n}(X, Y), \quad (219)$$

$$\nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega (Z) - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega (Z) - \nabla_{[X,Y]}^\omega (Z) = [\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]. \quad (220)$$

Il n'est pas difficile de constater que ∇^ω vérifie bien les hypothèses sur une connexion, à l'exception du codomaine, ce qui fait que nous parlons de *pseudo-connexion*. En effet, ∇^ω est bien bilinéaire; considérons f une fonction lisse sur P , alors nous avons le calcul suivant.

$$\nabla_{fX}^\omega (Y) = fX(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(fX), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (221)$$

$$= fX(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + f[\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] = f\nabla_X^\omega (Y) \quad (222)$$

$$\nabla_X^\omega (fY) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(fY)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(fY)] \quad (223)$$

$$= X(f\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + f[\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (224)$$

$$= X(f)\omega_{\mathbf{R}^n}(Y) + fX(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + f[\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (225)$$

$$= df(X)\omega_{\mathbf{R}^n}(Y) + f\nabla_X^\omega (Y) \quad (226)$$

Ce calcul et cette définition d'une pseudo-connexion affine nous rapproche d'une connexion affine sur M . La principale obstruction actuelle étant que ∇^ω est définie sur les champs de vecteurs tangents à P — et non tangents à M — et qu'elle est à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Cependant, remarquons et rappelons les phénomènes suivants. D'une part, $\Omega(X, Y)$ est toujours nulle si X ou Y est tangent à la fibre, c'est-à-dire si $\omega_P(X)$ ou $\omega_P(Y)$ appartient à $\mathfrak{gl}_n$. D'autre part, $\mathbf{R}^n = \mathfrak{aff}_n / \mathfrak{gl}_n$ et est donc bien isomorphe au tangent de M en n'importe quel point. Cela laisse penser que nous allons pouvoir faire un passage au quotient afin de définir une connexion ∇ sur M . *Nous supposons dorénavant que M a une connexion de Cartan stricte.* Cela nous permet d'identifier proprement $\mathbf{R}^n$ à $T_x M$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(TP)^2 & \xrightarrow{\nabla^\omega} & \mathbf{R}^n \\ \downarrow (\pi_P)_* & & \downarrow \\ \Gamma(TM)^2 & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(TM) \end{array} \quad (227)$$

Tout d'abord, l'identification entre $\mathbf{R}^n$ et $T_x M$ pour un point $x \in M$ se fait de la façon suivante. Nous choisissons $p \in P$ au-dessus de x . La connexion de Cartan stricte ω_P fournit une identification entre $T_p P$ et $\mathfrak{aff}_n$. En particulier, l'image inverse de $\mathbf{R}^n$ dans $T_p P$ est en isomorphisme par $(\pi_P)_*$ avec $T_x M$. Nous décidons que $v \in \mathbf{R}^n$ correspond à $(\pi_P)_*(\omega_P^{-1})_p(v) \in T_x M$. Si nous changeons p en ph , alors l'image inverse de v en p , disons u , est changé en $(R_h)_* u$, et $\omega_P((R_h)_* u) = \text{Ad}(h^{-1})(u)$. Ainsi, si nous faisons R_h dans la fibre, les vecteurs u dans $T_p P$ se transforment de façon équivariante avec $\text{Ad}(h^{-1})$ pour être de projection constante.

Maintenant, la flèche verticale qui devrait projeter un champ de P sur un champ de M n'est bien définie que si les valeurs le long de chaque fibre se projette de façon constante sur M . En d'autres termes, $V \in \Gamma(TP)$ correspond à un champ $X \in \Gamma(TM)$ si, et seulement si,

$$\forall p \in P, \forall h \in \text{GL}_n(\mathbf{R}), V(ph) = (R_h)_* V(p). \quad (228)$$

La réciproque nous est donnée en utilisant l'identification entre $T_x M$ et le sous-espace de $T_p P$ envoyé sur $\mathbf{R}^n$.

Pour obtenir l'application ∇ désirée, il nous reste à vérifier que l'équivariance entre $(R_h)_*$ sur $T_p P$ et $\text{Ad}(h^{-1})$ sur $\mathbf{R}^n$ est encore vraie avec ∇^ω . Supposons que $X, Y \in \Gamma(TP)$ correspondent à des champs de M . En particulier, la dérivée de Lie le long de $(R_h)_* X$ est la même que celle le long de X .

$$\nabla_{(R_h)_* X}^\omega((R_h)_* Y) = ((R_h)_* X)(\omega_{\mathbf{R}^n}((R_h)_* Y)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}((R_h)_* X), \omega_{\mathbf{R}^n}((R_h)_* Y)] \quad (229)$$

$$= \text{Ad}(h^{-1})X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + [\text{Ad}(h^{-1})\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \text{Ad}(h^{-1})\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (230)$$

$$= \text{Ad}(h^{-1})X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + \text{Ad}(h^{-1})[\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (231)$$

$$= \text{Ad}(h^{-1})\nabla_X^\omega(Y) \quad (232)$$

Par conséquent, nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME IV.5 *Soit M un espace généralisé modelé sur l'espace affine à connexion de Cartan stricte. La pseudo-connexion ∇^ω passe au quotient en une connexion affine sur M ,*

$$\nabla : \Gamma(TM)^2 \rightarrow \Gamma(TM). \quad (233)$$

Sa courbure & sa torsion sont celles de la connexion de Cartan initiale. De plus, avec les identifications précédemment construites,

$$\nabla_X(Y) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)). \quad (234)$$

Le terme du crochet a disparu en raison du fait suivant : si $X \in \Gamma(TP)$ provient d'un champ de vecteur sur M , alors $\omega_P(X) \in \mathbf{R}^n$ et donc $\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X) = 0$.

Nous aurions également pu définir la connexion ∇ comme nous l'avons fait dans le théorème et constater qu'il s'agit effectivement d'une connexion affine. Cependant, pour s'assurer que la torsion et la courbure de ∇ correspondent à celles de ω_P , il fallait procéder au calcul.

Au début de notre chapitre, nous avons mentionné le fait que la connexion affine ∇ permet de déterminer lorsque M est localement euclidienne. Justifions ce fait.

THÉORÈME IV.6 *Soit M un espace généralisé strict modelé sur l'espace affine. Sa connexion affine induite ∇ est de torsion & de courbure nulles si, & seulement si, $\Omega = 0$. Par conséquent, cette connexion affine est de torsion & de courbure nulles si, & seulement si, M est localement euclidienne⁵³.*

PREUVE Puisque ∇ est la connexion induite par ∇^ω , le fait que ∇ soit de torsion et de courbure nulle est équivalent à ce que ce soit le cas de ∇^ω pour les champs de vecteurs sur P induits par des champs de vecteurs de M . Cependant, nous avons déjà montré que $\Omega(u, v) = 0$ dès que u ou v est tangent à la fibre (III.13, p. 30). Ainsi, $\Omega(u, v)$ ne dépend en réalité que de sa valeur sur $\mathfrak{aff}_n / \mathfrak{gl}_n$, c'est-à-dire exactement l'espace où les champs induits par ceux sur M prennent leurs valeurs. $\mathbb{X}$

53. La conséquence provient du résultat sur les espaces localement homogènes (III.6, p. 25).

Une conséquence intéressante de nos calculs est la suivante.

COROLLAIRE IV.7 Soient X, Y & Z trois champs de vecteurs sur P induits par des champs de M . Alors

$$[\Omega_{\mathfrak{gl}_n}(X, Y), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)] = -[\omega_{\mathfrak{gl}_n}([X, Y]), \omega_{\mathbf{R}^n}(Z)]. \quad (235)$$

PREUVE En effet, par le calcul, nous observons que si $\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X)$ et $\omega_{\mathfrak{gl}_n}(Y)$ sont nuls, alors le seul terme restant est celui énoncé. $\mathbb{X}$

Espaces symétriques Il est assez connu que les espaces symétriques riemanniens ont pour courbure riemannienne

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]. \quad (236)$$

Et, en effet, cela peut se retrouver avec la connexion de Cartan suivante. Si $G \rightarrow G/H$ est l'espace symétrique avec la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, alors par hypothèse H agit par isométries et donc $H \subset O(n)$. Nous prenons la connexion de Cartan qui est l'identité entre $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{o}(n)$ et qui est aussi l'identité entre $\mathfrak{p}$ et $\mathbf{R}^n$ comme espaces vectoriels.

IV.2 CONNEXION HORIZONTALE

Il est difficile de résister à la tentation de généraliser la construction précédente aux autres espaces homogènes réductifs. Considérons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h} \quad (237)$$

une algèbre de Lie réductive associée à un espace homogène G/H . Nous penserons comme précédemment à $\mathfrak{p}$ comme étant le sous-espace horizontal du tangent ⁵⁴.

Comme précédemment, nous voyons $\mathfrak{h}$ comme agissant sur $\mathfrak{p}$ par le crochet de Lie, ce qui revient à dire que H agit par conjugaison sur G/H , ce qui est encore la même chose que de dire que H agit à gauche puisque $hxH = hxx^{-1}H$. Nous avons à présent les crochets :

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}. \quad (238)$$

La principale différence par rapport au cas affine est que le crochet sur $\mathfrak{p}$ n'est pas nécessairement nul. En d'autres termes, $\mathfrak{p}$ n'est plus nécessairement abélien. Pourtant $\mathfrak{p}$ est un espace vectoriel tout comme $\mathbf{R}^n$. Ainsi, même si nous ne parlerons pas de connexion affine mais de *connexion horizontale*, nous avons encore affaire à des espaces linéaires. Même si nous ne pouvons rien dire de $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, nous pouvons toujours procéder à une décomposition :

$$\forall u, v \in \mathfrak{p}, [u, v] = [u, v]_{\mathfrak{p}} + [u, v]_{\mathfrak{h}}. \quad (239)$$

Considérons M un espace généralisé modelé sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. La connexion de Cartan ω_P ainsi que la courbure Ω peuvent encore être décomposée selon $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$. Par esprit d'analyse-synthèse nous allons encore inspecter la formule de la torsion de Ω afin d'en déduire le candidat naturel pour notre connexion horizontale ∇^ω .

$$d\omega_{\mathfrak{p}}(X, Y) = X(\omega_{\mathfrak{p}}(Y)) - Y(\omega_{\mathfrak{p}}(X)) - \omega_{\mathfrak{p}}([X, Y]) \quad (240)$$

$$\Omega_{\mathfrak{p}}(X, Y) = d\omega_{\mathfrak{p}}(X, Y) + [\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{p}} + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)] - [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(X)] \quad (241)$$

$$= (X(\omega_{\mathfrak{p}}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]) - (Y(\omega_{\mathfrak{p}}(X)) + [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(X)]) + [\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{p}} - \omega_{\mathfrak{p}}([X, Y]) \quad (242)$$

Ainsi, nous considérons encore comme candidat

$$\nabla_X^\omega(Y) = X(\omega_{\mathfrak{p}}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]. \quad (243)$$

La torsion de cette pseudo-connexion est ainsi par

$$\nabla_X^\omega(Y) - \nabla_Y^\omega(X) - (\omega_{\mathfrak{p}}([X, Y]) - [\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{p}}) = \Omega_{\mathfrak{p}}(X, Y). \quad (244)$$

⁵⁴. Il est peut-être malheureux ici d'avoir désigné ce sous-espace par $\mathfrak{p}$ alors que $\mathfrak{h}$ aurait pu être une notation préférable.

Cette torsion, si elle peut paraître étrange au niveau du terme entre parenthèses, est à comprendre avec le calcul de la courbure d'une connexion de Cartan que nous avons fait. Le terme supplémentaire par rapport au cas affine s'explique par le fait que $\mathfrak{p}$ n'est pas nécessairement abélien, et induit donc un défaut systématique qui n'est pas un défaut de courbure (de Cartan).

Pour ce qui est de la courbure classique, nous allons de nouveau nous intéresser au crochet

$$[\Omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]. \quad (245)$$

Précédemment, nous avons fait la remarque que si $[A, v]$ est nul pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, alors A est nul dans $\mathfrak{gl}_n$. Nous avons donc besoin de l'hypothèse suivante : si $[h, v] = 0$ pour tout $v \in \mathfrak{p}$ alors $h \in \mathfrak{h}$ est nul.

LEMME IV.8 Supposons que G agisse fidèlement sur l'espace homogène réductif G/H . Alors, si $[h, v] = 0$ pour $h \in \mathfrak{h}$ et tout $v \in \mathfrak{p}$, alors $h = 0$.

PREUVE Si $[h, v] = 0$ pour tout $v \in \mathfrak{p}$, alors c'est certainement vrai pour h aussi petit que désiré. Considérons $\exp(h) \in H$. Puisque $\exp \circ \text{ad}(h) = \text{Ad}_{\exp(h)}$, cela implique que $\text{Ad}_{\exp(h)}$ agit trivialement sur $\mathfrak{p}$ et cela signifie donc que $\exp(h)$ normalise G . Cela implique par (I.23, p. 11) que G n'agit pas fidèlement sur G/H , absurde par hypothèse. $\mathbb{X}$

Par calcul, nous trouvons à nouveau les égalités suivantes :

$$\Omega_{\mathfrak{h}}(X, Y) = d\omega_{\mathfrak{h}}(X, Y) + [\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{h}} + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{h}}(Y)], \quad (246)$$

$$[\Omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] = [d\omega_{\mathfrak{h}}(X, Y) + [\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{h}} + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{h}}(Y)], \omega_{\mathfrak{p}}(Z)], \quad (247)$$

$$[d\omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] = [X(\omega_{\mathfrak{h}}(Y)), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] - [Y(\omega_{\mathfrak{h}}(X)), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] - [\omega_{\mathfrak{h}}([X, Y]), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)], \quad (248)$$

$$[[\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{h}}(Y)], \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] = [\omega_{\mathfrak{h}}(X), [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]] - [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]] . \quad (249)$$

$$\nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega(Z) = \nabla_X^\omega(Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z)) + [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]) \quad (250)$$

$$= X(Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))) + X([\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]) + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))] + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]] \quad (251)$$

$$= X(Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))) + [X(\omega_{\mathfrak{h}}(Y)), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] + [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), X(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))] + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))] + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), [\omega_{\mathfrak{h}}(Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)]] \quad (252)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega(Z) - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega(Z) &= X(Y(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))) - Y(X(\omega_{\mathfrak{p}}(Z))) \\ &\quad + [d\omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] + [\omega_{\mathfrak{h}}([X, Y]), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \\ &\quad + [[\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{h}}(Y)], \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \end{aligned} \quad (253)$$

$$\nabla_{[X, Y]}^\omega(Z) = [X, Y](\omega_{\mathfrak{h}}) + [\omega_{\mathfrak{h}}([X, Y]), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \quad (254)$$

$$= X(Y(\omega_{\mathfrak{h}})) - Y(X(\omega_{\mathfrak{h}})) + [\omega_{\mathfrak{h}}([X, Y]), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \quad (255)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega(Z) - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega(Z) - \nabla_{[X, Y]}^\omega(Z) &= [d\omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] + [[\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{h}}(Y)], \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \\ &\quad - [[\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \end{aligned} \quad (256)$$

$$= [\Omega_{\mathfrak{h}}(X, Y), \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] - [[\omega_{\mathfrak{p}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]_{\mathfrak{h}}, \omega_{\mathfrak{p}}(Z)] \quad (257)$$

Par conséquent nous avons montré le résultat suivant.

THÉORÈME IV.9 Soit G/H un espace homogène réductif avec la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$. Soit $P \rightarrow M$ un espace généralisé modelé sur cet espace homogène. Définissons la pseudo-connexion horizontale

$$\nabla^\omega : \Gamma(TP) \times \Gamma(TP) \rightarrow \mathfrak{p} \quad (258)$$

par l'expression

$$\nabla_X^\omega(Y) = X(\omega_{\mathfrak{p}}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{h}}(X), \omega_{\mathfrak{p}}(Y)]. \quad (259)$$

Alors la courbure & la torsion de ∇^ω sont déterminées par

$$\nabla_X^\omega(Y) - \nabla_Y^\omega(X) - (\omega_p([X, Y]) - [\omega_p(X), \omega_p(Y)]_p) = \Omega_p(X, Y), \quad (260)$$

$$\nabla_X^\omega \nabla_Y^\omega(Z) - \nabla_Y^\omega \nabla_X^\omega(Z) - \left(\nabla_{[X, Y]}^\omega(Z) - [\omega_p(X), \omega_p(Y)]_h, \omega_p(Z) \right) = [\Omega_h(X, Y), \omega_p(Z)]. \quad (261)$$

La torsion de ∇^ω est nulle si, & seulement si, Ω est de torsion nulle. Si de plus G agit fidèlement sur G/H , alors ∇^ω est de courbure nulle si, & seulement si, Ω est de courbure classique nulle.

Les calculs précédents justifient ce théorème. Il n'est pas difficile de constater que ∇^ω est bien bilinéaire et que si f est une fonction lisse sur P alors

$$\nabla_{fX}^\omega(Y) = f \nabla_X(Y), \quad (262)$$

$$\nabla_X^\omega(fY) = df(X) + f \nabla_X(Y). \quad (263)$$

Ce qui fait bien de ∇^ω une pseudo-connexion.

À présent, et comme précédemment, nous souhaitons passer de ∇^ω à une connexion sur M . Il n'est pas difficile de passer de p à $T_x M$, et un champ de vecteurs sur P correspond à un champ de vecteurs sur M si, et seulement si, il est invariant par l'action à droite de H . De plus, tout champ de P qui correspond à un champ de M est à valeurs dans p par ω_p , et donc est toujours de composante nulle dans h . Par conséquent, nous avons la définition et le résultat suivant.

DÉFINITION IV.10 Soit G/H un espace homogène réductif avec la décomposition $\mathfrak{g} = p \oplus h$. Soit $P \rightarrow M$ un espace généralisé strict modelé sur cet espace homogène. Nous définissons la dérivée covariante — ou connexion horizontale — sur M ,

$$\nabla: \Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M)) \rightarrow \Gamma(T(M)), \quad (264)$$

par la formule suivante, où nous avons l'identification entre $T_x M$ & p , & l'association entre les champs de vecteurs de M & ceux de P invariants à droite,

$$\nabla_X(Y) = X(\omega_p(Y)). \quad (265)$$

THÉORÈME IV.11 Soit G/H un espace homogène réductif avec la décomposition $\mathfrak{g} = p \oplus h$. Soit $P \rightarrow M$ un espace généralisé strict modelé sur cet espace homogène. Supposons que G agisse fidèlement sur G/H . La courbure & la torsion de la connexion horizontale ∇ sont nulles, si, & seulement si, M est localement homogène.

Comme dans le cas affine, ce théorème se justifie par le fait que $\Omega(u, v)$ est nul dès que u ou v est tangent à la fibre H dans P , et que toute valeur horizontale peut être prise comme valeur d'un champ induit par un champ de vecteurs sur M .

À nouveau, nos calculs donnent le corollaire suivant.

COROLLAIRE IV.12 Soient X, Y & Z trois champs de vecteurs sur P induits par des champs de M . Alors

$$[\Omega_h(X, Y), \omega_p(Z)] = -[\omega_h([X, Y]), \omega_p(Z)] + [\omega_p(X), \omega_p(Y)]_h, \omega_p(Z)]. \quad (266)$$

V — PRINCIPE DE JAUGE

Nous avons délibérément choisi de définir les espaces généralisés M à travers des connexions de Cartan qui sont définies sur tout le tangent de l'espace total du fibré principal $P \rightarrow M$. Pourtant, ce n'est peut-être pas la façon la plus naturelle de procéder lorsque nous avons comme connaissance ce qui se produit sur M . Par ailleurs en suivant le texte et les calculs de Cartan, nous pouvons nous rendre compte qu'il y a l'utilisation des quantifications permises par le choix de repères. En d'autres termes, le choix d'une section de $P \rightarrow M$ permet de faire des calculs analytiques explicites (pensés sur M), qui doivent porter la même signification que la connexion de Cartan. Une telle section, nous la nommerons *jauge*.

Les jauges nous permettront de montrer la réciproque du problème d'équivalence affine, à savoir qu'une connexion affine sur M fournit bien une connexion de Cartan du fibré des repères à valeurs dans l'algèbre de Lie aff_n du groupe des transformations affines. Puisque la donnée d'une connexion affine (classique) sur M se fait explicitement en termes de symboles de Christoffel, nous verrons comment employer une jauge — donc une quantification donnée par un choix de repères — pour retrouver la connexion de Cartan correspondante.

S'il est largement défendable que les jauges ainsi que les connexions de Cartan — que nous dirons jaugées — fournissent une meilleure reconstitution historique de la pensée de Cartan, il est en revanche assez difficile de maintenir une réflexion mathématique complète sans construire une connexion de Cartan telle que nous l'avons définie. De plus, l'aspect synthétique fourni par une connexion de Cartan permet d'abstraire certains calculs rendus compliqués par la quantification. L'indépendance analytique de l'expression de la connexion de Cartan, pour reprendre ses mots, justifie aussi la motivation d'une construction générale effectuée à partir d'une connexion de Cartan non jaugée, et c'est le choix que nous avons fait.

Pour nous rendre compte de la pratique de Cartan, regardons ce qu'il écrit dans son premier mémoire⁵⁵ alors qu'il introduit les connexions affines (p. 362).

La notion de variété à connexion affine.

28. Considérons maintenant une variété numérique à trois dimensions, dont chaque point $\mathbf{m}$ est supposé défini par trois nombres u^1, u^2, u^3 . Faisons correspondre par la pensée à chaque point $\mathbf{m}$ un espace affine contenant ce point, et soient $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ trois vecteurs formant avec $\mathbf{m}$ un système de référence pour cet espace. La variété sera dite à « connexion affine » lorsqu'on aura défini, d'une manière d'ailleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points *infinitement voisins* quelconques $\mathbf{m}$ de $\mathbf{m}'$ de la variété; cette loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}'$ correspond à tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}$, que tel vecteur du premier espace est parallèle ou équipollent à tel vecteur du second espace. En particulier, le point $\mathbf{m}'$ lui-même sera repéré par rapport à l'espace affine du point $\mathbf{m}$ et nous admettrons la loi de continuité d'après laquelle les coordonnées de $\mathbf{m}'$ par rapport au système de référence affine d'origine $\mathbf{m}$ sont infinitement petites; cela permettra de dire en un certain sens que l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est l'espace affine *tangent* à la variété donnée⁵⁶.

D'après cela, si l'on attache à chaque point $\mathbf{m}$, dans l'espace affine tangent, trois vecteurs de référence $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (pouvant même dépendre de paramètres arbitraires), la connexion affine de la variété s'exprimera par des formules identiques de forme à (267) :

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3 \quad (i = 1, 2, 3), \end{cases} \quad (267)$$

dans lesquelles les ω^i et ω_i^j sont des formes linéaires par rapport aux différentielles des paramètres dont dépend le système de référence variable, les ω^i ne dépendant que des différentielles du^1, du^2, du^3 . Elles s'interprètent en disant que tout point $\mathbf{m}'$ infinitement voisin de $\mathbf{m}$ sur la variété doit être regardé comme le point

$$\mathbf{m} + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 \quad (268)$$

55. [Car23] CARTAN, « Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) », 1923.

56. On pourrait évidemment, comme on le fait d'habitude, remarquer qu'au voisinage du point $\mathbf{m}$ il existe un repérage affine pour les points de la variété, ne serait-ce que celui qui consiste à attribuer au point défini par $u^i + du^i$ les coordonnées cartésiennes du^i ; en ce sens l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est bien *tangent* à la variété. On pourrait supposer aussi que la variété est plongée dans un espace affine à un nombre plus ou moins grand de dimensions et que l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est effectivement l'espace plan tangent à cette variété. On pourrait enfin regarder l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ comme la variété elle-même qui serait perçue d'une manière affine par un observateur placé en $\mathbf{m}$. Tous ces points de vue sont compatibles avec le point de vue du texte qui me semble logiquement préférable. (Note de Cartan.)

de l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$ ⁵⁷; de même le vecteur $\mathbf{e}_i$ attaché à $\mathbf{m}'$ est équipollent au vecteur

$$\mathbf{e}_i + \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3 \quad (269)$$

de l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$. Naturellement, cette équipollence ne doit être considérée comme ayant un sens qu'aux infiniment petits du second ordre près.

On peut adjoindre aux formules (267) celles qui permettent de passer des coordonnées x^i d'un point de l'espace affine $\mathbf{m}$ aux coordonnées $x^i + dx^i$ du point correspondant (on peut dire égal) de l'espace affine de $\mathbf{m}'$. Ces formules sont identiques aux formules (270) et s'obtiennent de la même manière :

$$dx^i + \omega^i + x^1 \omega_1^i + x^2 \omega_2^i + x^3 \omega_3^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (270)$$

Ajoutons-y les formules qui permettent le même passage pour un vecteur de projections ξ^i , et qui sont

$$d\xi^i + \xi^1 \omega_1^i + \xi^2 \omega_2^i + \xi^3 \omega_3^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (271)$$

Afin de faire correspondre nos notations avec celles de Cartan, nous remarquerons que la donnée de ses formes (ω_k, ω_i^j) donne une connexion de Cartan — que nous dirons jaugée — à travers la décomposition $\mathfrak{aff}_n = \mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{gl}_n$ de l'algèbre de Lie réductive du groupe des transformations affines. Plus tard, nous préférons noter θ la forme à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Commençons par définir les jauges et par expliquer comment le changement de jauge influe sur l'expression de la connexion de Cartan jaugée.

DÉFINITION V.1 Soit M un espace généralisé modelé sur la paire de Cartan $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ & de connexion de Cartan ω_P . Si $\sigma : U \rightarrow P$ est une jauge — c'est-à-dire une section du fibré —, alors la connexion de Cartan jaugée est la 1-forme

$$\omega_\sigma : TU \rightarrow \mathfrak{g} \quad (272)$$

définie par le tiré-en-arrière

$$\omega_\sigma = \sigma^* \omega_P. \quad (273)$$

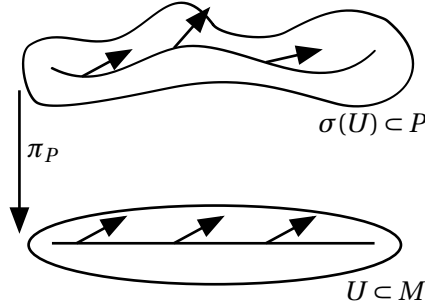


FIGURE 7 : Le choix d'une jauge permet de quantifier ω_P avec le tangent de U .

Le changement d'une jauge σ_1 à une jauge σ_2 s'exprime par une transformation $\psi : U \rightarrow H : \sigma_2(x) = \sigma_1(x)\psi(x)$. En d'autres termes

$$\sigma_2 = \mu_P \circ (\sigma_1 \times \psi) \circ \Delta, \quad (274)$$

avec Δ l'application diagonale $\Delta(x) = (x, x)$. Nous avons alors :

$$\omega_{\sigma_2} = (\mu_P \circ (\sigma_1 \times \psi) \circ \Delta)^* \omega_P \quad (275)$$

$$= ((\sigma_1 \times \psi) \circ \Delta)^* \mu_P^* \omega_P \quad (276)$$

$$= ((\sigma_1 \times \psi) \circ \Delta)^* (\pi_H^* \omega_H + (\pi_H^* \text{Ad}^{-1}) \pi_P^* \omega_P) \quad (277)$$

$$= \psi^* \omega_H + (\psi^* \text{Ad}^{-1}) \sigma_1^* \omega_P \quad (278)$$

$$= \psi^* \omega_H + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_1}. \quad (279)$$

57. On voit qu'en changeant au besoin le système de référence choisi pour l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$, les coordonnées cartésiennes du point $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$ sont du^1, du^2, du^3 puisque les ω^i sont des combinaisons linéaires des du^i . (Note de Cartan.)

Réciproquement, et c'est ce passage qui nous intéresse, la donnée d'un système de connexions de Cartan jaugées permet de reconstituer un espace généralisé.

DÉFINITION V.2 Soient M une variété lisse, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une paire de Cartan & $P \rightarrow M$ un H -fibré principal à droite. Un système de connexions de Cartan jaugées est la donnée :

- d'un recouvrement de M par des ouverts $\bigcup U_i = M$;
- de jauges $\sigma_i : U_i \rightarrow P$;
- de 1-formes à valeurs dans $\mathfrak{g}$, $\omega_{\sigma_i} : TU_i \rightarrow \mathfrak{g}$.

De plus, ces 1-formes vérifient les conditions suivantes :

- (1) chaque forme ω_{σ_i} vérifie que $\omega_{\sigma_i}(v_p) \in \mathfrak{h}$ implique $v_p = 0$;
- (2) si $\psi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow H$ est une fonction lisse telle que $\sigma_j = \sigma_i \psi_{ij}$, alors sur $U_i \cap U_j$:

$$\omega_{\sigma_j} = \psi_{ij}^* \omega_H + \text{Ad}(\psi_{ij})^{-1} \omega_{\sigma_i}. \quad (280)$$

Nous désignerons par $(\sigma_i, \omega_{\sigma_i})$ ce système. Nous dirons qu'il provient d'une connexion de Cartan $\omega_P : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ si pour chaque jauge $\omega_{\sigma_i} = \sigma_i^* \omega_P$.

Il est clair que tout système qui proviendrait d'une connexion de Cartan ω_P vérifie bien les conditions énoncées du fait du calcul précédent. La condition que $\omega_{\sigma_i}(v_p) \in \mathfrak{h}$ implique $v_p = 0$ signifie en fait que les vecteurs v_p ne sont jamais tangents aux fibres.

La réciproque permet de montrer que cette donnée suffit pour reconstituer pleinement la connexion de Cartan ω_P . La raison profonde pour laquelle ceci est possible est la suivante. La connexion de Cartan ne dépend pas de sa valeur le long des fibres puisque celle-ci est déjà connue : c'est la forme de Maurer-Cartan ω_H . Le choix d'une jauge quantifie donc la connexion de Cartan (en un sens) horizontalement (même si l'espace modèle n'est pas réductif). Pour reconstituer la connexion de Cartan nous utilisons une fois de plus l'équivariance du produit à droite dans le fibré et l'action adjointe dans l'algèbre de Lie. Tout cela apparaît dans la formule qui servira de définition :

$$\omega_P|_{U_i \times H} = \pi_2^* \omega_H + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_{\sigma_i}. \quad (281)$$

THÉORÈME V.3 (Principe de jauge) Soit M une variété lisse munie d'un système de connexion de Cartan jaugées. Alors il existe une connexion de Cartan ω_P telle que le système $(\sigma_i, \omega_{\sigma_i})$ provienne de ω_P .

PREUVE La preuve consiste à observer que le fibré principal P est exactement spécifié par le recollement de trivialisations locales $U_i \times H$. Si σ_i, σ_j sont deux jauges alors la relation d'équivalence sur le recollement de l'intersection $(U_i \times H) \cap (U_j \times H)$ est donnée par

$$(p, h_i) = (p, \psi_{ij}(p) h_j). \quad (282)$$

En effet dans P nous avons

$$(\sigma_i(p), h_i) = (\sigma_j(p), h_j) = (\sigma_i(p) \psi_{ij}(p), h_j) \quad (283)$$

$$\iff (\sigma_i(p), h_i) = (\sigma_i(p), \psi_{ij}(p) h_j). \quad (284)$$

Nous définissons alors la connexion de Cartan $\omega_P : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ sur chaque trivialisation $T(U_i \times H)$ par

$$\omega_P|_{U_i \times H} = \pi_2^* \omega_H + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_{\sigma_i}, \quad (285)$$

$$\omega_P|_{U_i \times H}(v, w)_{p, h} = \omega_H(w_h) + \text{Ad}(h)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p). \quad (286)$$

Il nous faut vérifier que cette valeur ne dépend pas du choix de la carte. Fixons $p \in U_i \cap U_j$ et notons $\psi = \psi_{ij}(p)$. Nous considérons un couple $(v, w)_{p, h_i}$ dans $TU_i \times TH$. Dans la carte $U_i \supset U_i \cap U_j$, nous avons par définition

$$\omega_P|_{U_i \times H}(v, w)_{p, h_i} = \omega_H(w) + \text{Ad}(h_i)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p). \quad (287)$$

Considérons maintenant la carte $U_j \supset U_i \cap U_j$. Le couple $(v, w)_{p, h_i}$ du tangent de $U_i \times H$ devient $(v, w')_{p, h_j}$. De plus $h_j = \psi_{ij}^{-1}(p) h_i$. Nous notons $\psi = \psi_{ij}(p)$.

$$\omega_P|_{U_j \times H}(v, w')_{p, \psi^{-1} h_i} = \omega_H(w') + \text{Ad}(h_i)^{-1} \text{Ad}(\psi) \omega_{\sigma_j}(v_p), \quad (288)$$

$$\omega_{\sigma_j}(v_p) = \psi_{ij}^* \omega_H(v_p) + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p). \quad (289)$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\omega_H(w) = \omega_H(w') + \text{Ad}(h_i)^{-1} \text{Ad}(\psi) \psi_{ij}^* \omega_H(v_p). \quad (290)$$

Si nous prenons l'application $\rho(p, h) = \psi_{ij}^{-1}(p)h$ alors $\rho_*(v, w)_{p, h_i} = w'_{h_j}$. Mais $\rho = \mu_H \circ (\iota \times \text{id}) \circ (\psi_{ij} \times \text{id})$ avec ι l'inversion. Par dérivation :

$$\rho^* \omega_H = (\mu_H \circ (\iota \times \text{id}) \circ (\psi_{ij} \times \text{id}))^* \omega_H \quad (291)$$

$$= ((\iota \times \text{id}) \circ (\psi_{ij} \times \text{id}))^* (\pi_2^* \omega_H + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) \pi_1^* \omega_H) \quad (292)$$

$$= (\psi_{ij} \times \text{id})^* (\pi_2^* \omega_H + (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) (-(\pi_1^* \text{Ad}) \pi_1^* \omega_H)) \quad (293)$$

$$= \pi_2^* \omega_H - (\pi_2^* \text{Ad}^{-1}) (\psi_{ij}^* \text{Ad}) \psi_{ij}^* \pi_1^* \omega_H, \quad (294)$$

nous obtenons :

$$\omega_H(w')_{h_j} = \rho^* \omega_H(v, w)_{p, h_i} \quad (295)$$

$$= \omega_H(w) - \text{Ad}(h_i)^{-1} \text{Ad}(\psi) \psi_{ij}^* \omega_H(v_p), \quad (296)$$

ce qui donne bien l'égalité recherchée. La définition de la 1-forme ω_P ne dépend donc pas de la jauge choisie.

Il nous faut montrer à présent que ω_P est bien une connexion de Cartan. L'injectivité découle du raisonnement suivant.

$$\omega_P|_{U_i \times H}(v, w)_{p, h} = \omega_H(w_h) + \text{Ad}(h)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p) \quad (297)$$

$$0 = \omega_H(w_h) + \text{Ad}(h)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p) \quad (298)$$

$$\iff \omega_H(w_h) = -\text{Ad}(h)^{-1} \omega_{\sigma_i}(v_p) \quad (299)$$

et donc $\omega_{\sigma_i}(v_p)$ appartient lui-même à $\mathfrak{h}$ et donc v_p est nul. Par suite w_h est nul et donc ω_P est bien injective. La formule de la dérivée du produit dans P est bien vérifiée puisqu'elle est contenue dans les hypothèses de ω_{σ_i} . $\mathbb{Z}$

Ce principe de jauge va enfin nous permettre de compléter la correspondance entre connexions affines et connexions de Cartan strictes à valeurs dans aff_n . Nous savons déjà construire une pseudo-connexion affine à partir d'une connexion de Cartan stricte à valeurs dans $\text{aff}_n = \mathfrak{gl}_n \oplus \mathbf{R}^n$:

$$\nabla_X^\omega(Y) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(X), \omega_{\mathbf{R}^n}(Y)] \quad (300)$$

et nous avons vu comment cette pseudo-connexion sur P induit sur M une connexion affine.

Le point subtil dont nous allons rapidement nous rendre compte est le suivant. Le geste naturel que nous avons employé pour relever un champ de vecteur de M en un champ de P consistait à prendre celui dont la valeur par ω_P était entièrement contenue dans $\mathbf{R}^n$. Cependant, classiquement, lorsque nous inspectons une connexion affine donnée par des symboles de Christoffel, il n'est pas vrai que la partie de rotation est nulle : elle est en fait exactement prescrite par les symboles de Christoffel. Cela nous apparaîtra plus clairement plus tard, mais l'avertissement est donné : l'expression $\nabla_X^\omega(Y) = X(\omega_{\mathbf{R}^n}(Y))$ est de la même nature que celle d'une dérivation covariante dans des coordonnées géodésiques — avec des symboles de Christoffel nuls.

Considérons M une variété lisse munie d'une connexion affine $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$. Considérons le fibré principal $P \rightarrow M$ des repères sur M . C'est le fibré principal dont la fibre est $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ et où chaque point $p \in P$ représente un repère de l'espace tangent de $\pi(p) = x \in M$. Nous identifions une fois pour toute la fibre $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ avec les matrices inversibles de $\mathbf{R}^n$ pour une certaine base $(e_1, \dots, e_n)$. Désignons par $(e^1, \dots, e^n)$ sa base duale.

Soit $M = \bigcup U_i$ un recouvrement de M par des ouverts U_i . Quitte à réduire les U_i , nous pouvons supposer qu'il existe pour chaque ouvert une jauge $\sigma_i : U_i \rightarrow P$. Ces jauges, qui à un point de M associent un repère du tangent, sont aussi appelées *repères mobiles* (cette appellation est historique et classiquement attribuée à Darboux).

Prenons U_1 et notons plutôt $X = \sigma_1$ sa jauge. Alors $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un repère mobile, c'est-à-dire que chaque $X_i(p)$ appartient à $T_p M$ et $X(p)$ est une matrice inversible de $\mathbf{R}^n$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Son inverse à gauche fournit la base duale, que nous désignons par $\theta : \theta^i(X_j) = \delta_{ij}$.

Les champs de vecteurs $X_i \in \Gamma(TU_1)$ peuvent être employés pour évaluer ∇ . La signification de $\nabla_{X_i}(X_j)$ est la suivante : cette quantité qui est un vecteur de TU_1 indique comment varie X_j lorsque nous suivons le champ X_i . Si nous laissons le champ X_j libre, alors ∇_{X_i} explique comment tourne le repère le long du champ X_i . Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k dans cette carte sont prescrits par

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k = \sum_k \Gamma_{ij}^k \otimes X_k \quad (301)$$

et réciproquement prescrivent ∇ sur U_1 :

$$\nabla = \sum_{ij} \theta^i \otimes X_i(\theta^j) \otimes X_j + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \theta^i \otimes \theta^j \otimes X_k. \quad (302)$$

Remarquons en particulier que

$$\nabla(X_m) = \sum_{ij} \theta^i \otimes X_i(\theta^j)(X_m) \otimes X_j + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \theta^i \otimes \theta^j(X_m) \otimes X_k \quad (303)$$

$$= \sum_{ij} \theta^i \otimes X_i(\delta_{jm}) \otimes X_j + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \theta^i \otimes \delta_{jm} \otimes X_k \quad (304)$$

$$= 0 + \sum_{ik} \Gamma_{im}^k \theta^i \otimes X_k, \quad (305)$$

ce qui nous donne

$$\theta^k(\nabla(X_j)) = \theta^k \left(\sum_{ik} \Gamma_{ij}^k \theta^i \otimes X_k \right) = \sum_i \Gamma_{ij}^k \theta^i \quad (306)$$

$$\theta^k(\nabla_\nu(X_j)) e^j \otimes e_k = \sum_i \Gamma_{ij}^k \theta^i(\nu) e^j \otimes e_k. \quad (307)$$

Nous allons définir la connexion de Cartan jaugée en pensant $\Gamma_{ij}^k e^j \otimes e_k$ comme étant la matrice d'une transformation de $\mathfrak{gl}_n$. Nous définissons la connexion de Cartan jaugée sur U_1 par

$$\forall \nu \in T_x M, \omega_{\sigma_1}(\nu) = \sum_i \theta^i(\nu) e_i + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \theta^i(\nu) e^j \otimes e_k. \quad (308)$$

Pour appliquer le principe de jauge, il nous reste à vérifier que si σ_2 est une autre jauge sur $U_1 \cap U_2$ avec $\sigma_2 = \sigma_1 \psi$ alors

$$\omega_{\sigma_2}(\nu) = \psi^* \omega_{\sigma_1}(\nu) + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_1}(\nu). \quad (309)$$

Utilisons à nouveau la description du fibré principal. Si $\sigma_2 = \sigma_1 \psi$, alors le nouveau repère mobile $Y = \sigma_2 = (Y_1, \dots, Y_n)$ est donné par le produit matriciel $Y = X\psi$. La nouvelle base duale ϕ de Y est l'inverse à gauche de Y , c'est-à-dire $\psi^{-1}\theta$.

Le premier terme est exactement la coordonnée dans $\mathbf{R}^n$. Nous avons

$$\phi^i = (\psi^{-1}\theta)^i = \sum_l (\psi^{-1})_l^i \theta^l, \quad (310)$$

$$\sum_i \phi^i(\nu) e_i = \sum_{li} (\psi^{-1})_l^i \theta^l(\nu) e_i \quad (311)$$

ce qui montre bien que

$$\omega_{\sigma_2}^{\mathbf{R}^n}(\nu) = \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_1}^{\mathbf{R}^n}(\nu) = \psi^{-1} \omega_{\sigma_1}^{\mathbf{R}^n}(\nu). \quad (312)$$

Il faut remarquer ici que l'action adjointe de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{R}^n \subset \text{aff}_n$ est en fait le produit matriciel à gauche :

$$\text{Ad}(A)v = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ Av & 0 \end{pmatrix} = Av. \quad (313)$$

Pour l'étude du second terme (et donc de la coordonnée dans $\mathfrak{gl}_n$) nous avons observé que

$$\sum_i \Gamma_{ij}^k \theta^i(\nu) e^j \otimes e_k = \theta^k(\nabla_\nu(X_j)) e^j \otimes e_k, \quad (314)$$

avec θ^k qui agit par composition (et non par dérivation de Lie). Si nous prenons maintenant le repère mobile Y et sa forme duale ϕ , nous avons

$$(\psi^{-1}\theta)^k = \sum_l (\psi^{-1})_l^k \theta^l, \quad (315)$$

$$(X\psi)_j = \sum_m X_m \psi_j^m = \sum_m \psi_j^m X_m, \quad (316)$$

$$\sum_i \tilde{\Gamma}_{ij}^k \phi^i(v) e^j \otimes e_k = \phi^k(\nabla_v(Y_j)) e^j \otimes e_k \quad (317)$$

$$= (\psi^{-1}\theta)^k (\nabla_v(X\psi)_j) \quad (318)$$

$$= \sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k \theta^l (\nabla_v(\psi_j^m X_m)) e^j \otimes e_k. \quad (319)$$

Maintenant, puisque ψ_j^m est une fonction lisse et que $\nabla_v(fX) = df(v) \cdot X + f\nabla_v(X)$, nous avons :

$$\sum_i \tilde{\Gamma}_{ij}^k \phi^i(v) = \sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k \theta^l (\nabla_v(\psi_j^m X_m)) \quad (320)$$

$$= \sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k \theta^l (d\psi_j^m(v) X_m + \psi_j^m \nabla_v(X_m)) \quad (321)$$

$$= \sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k d\psi_j^l(v) + (\psi^{-1})_l^k \theta^l (\psi_j^m \nabla_v(X_m)) \quad (322)$$

$$= \left(\sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k d\psi_j^l(v) \right) + \left(\sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k \psi_j^m \theta^l (\nabla_v(X_m)) \right), \quad (323)$$

$$\sum_{lm} (\psi^{-1})_l^k d\psi_j^l(v) = \psi^* \omega_{\mathfrak{gl}_n}(v), \quad (324)$$

$$\sum_{jklm} \left((\psi^{-1})_l^k \psi_j^m \theta^l (\nabla_v(X_m)) \right) e^j \otimes e_k = \sum_{jklm} \theta^l (\nabla_v(X_m)) (\psi_j^m e^j) \otimes ((\psi^{-1})_l^k e_k) \quad (325)$$

$$= \text{Ad}(\psi)^{-1} \sum_{ilm} \Gamma_{ij}^k \theta^i(v) e^l \otimes e_m \quad (326)$$

$$= \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_1}^{\mathfrak{gl}_n}(v). \quad (327)$$

Cela nous donne bien l'équivariance recherchée :

$$\omega_{\sigma_2}^{\mathfrak{gl}_n}(v) = \psi^* \omega_{\mathfrak{gl}_n}(v) + \text{Ad}(\psi)^{-1} \omega_{\sigma_1}^{\mathfrak{gl}_n}(v). \quad (328)$$

Par conséquent nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME V.4 *Soit M une variété lisse & ∇ une connexion affine sur M . Alors, avec le fibré des repères sur M , la connexion de Cartan induite par les connexions de Cartan jaugées*

$$\omega_{\sigma_i} = \sum_i \theta^i \otimes e_i + \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \theta^i \otimes e^j \otimes e_k, \quad (329)$$

avec $\sigma_i: M \supset U \rightarrow P$, est bien une connexion de Cartan modelée sur l'espace affine $\mathfrak{aff}_n$.

À partir de cette connexion de Cartan jaugée nous pouvons reconstruire, comme nous l'avons déjà établi, une connexion affine sur M en prenant la connexion induite par

$$\tilde{\nabla}_V^\omega(W) = V(\omega_{\mathbf{R}^n}(W)) + [\omega_{\mathfrak{gl}_n}(V), \omega_{\mathbf{R}^n}(W)]. \quad (330)$$

Nous avons bien égalité entre les deux connexions $\tilde{\nabla}$ et ∇ . En effet, il suffit d'évaluer sur une base des vecteurs tangents, par exemple les champs de vecteurs X_m . Mais alors $\sum \theta^i(X_m) e_i = \omega_{\mathbf{R}^n}(X_m)$ est constant et donc de dérivée nulle. Il ne reste que le terme du crochet, qui correspond au résultat obtenu en évaluant $\nabla(X_m)$.

Revenons à notre réflexion sur les symboles de Christoffel. Alors que dans la construction d'une connexion affine (classique) à partir d'une connexion de Cartan il a été beaucoup plus naturel de considérer des champ de vecteurs dont la partie verticale était nulle, cela est généralement impossible lorsque nous considérons uniquement une connexion affine. Il est en effet difficile de trouver des coordonnées où les symboles de Christoffel sont nuls, de telles coordonnées sont généralement dites normales ou géodésiques. Cela est en fait strictement équivalent au problème de trouver une jauge

horizontale, c'est-à-dire induisant une connexion de Cartan jaugée qui prend toutes ses valeurs dans $\mathbf{R}^n \subset \mathfrak{aff}_n$. Finalement, cela justifie géométriquement pourquoi les symboles de Christoffel ne peuvent absolument pas être ceux d'un tenseur : ils peuvent parfaitement être nuls (par exemple avec une jauge horizontale) sans pour autant que l'espace soit plat.

Par ces constructions, nous avons fourni la solution au problème d'équivalence.

THÉORÈME V.5 (Problème d'équivalence affine) *Soit M une variété lisse. La donnée d'une connexion affine sur M est la même que celle d'une connexion de Cartan à valeurs dans $\mathfrak{aff}_n$ pour le fibré des repères. De plus, avec l'identification fournie par n'importe quelle jauge σ ,*

$$\nabla_V(W) = V\left(\omega_\sigma^{\mathbf{R}^n}(W)\right) + \left[\omega_\sigma^{\mathfrak{gl}_n}(V), \omega_\sigma^{\mathbf{R}^n}(W)\right]. \quad (331)$$

VI — ANNEXE — FORMES À VALEURS DANS UNE ALGÈBRE DE LIE

Considérons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Cette section a pour vocation de définir précisément la sémantique des *formes à valeurs dans $\mathfrak{g}$* et leurs opérations.

Les 0-Lformes à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{g}$, rien n'est à adapter. Une 1-forme γ sur M à valeurs dans $\mathfrak{g}$ est une 1-forme différentielle

$$\gamma: TM \rightarrow \mathfrak{g}. \quad (332)$$

Nous posons pour toute p -forme γ et q -forme η à valeurs dans $\mathfrak{g}$:

$$[\gamma \wedge \eta](v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) [\gamma(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}), \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})]. \quad (333)$$

En particulier, lorsque γ et η sont deux 1-formes :

$$[\gamma \wedge \eta](X, Y) = [\gamma(X), \eta(Y)] - [\gamma(Y), \eta(X)]. \quad (334)$$

Une autre façon de procéder consiste à reprendre la définition du produit extérieur :

$$\gamma \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(\gamma \otimes \eta) \quad (335)$$

$$\text{Alt}(\gamma \otimes \eta) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \gamma(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \otimes \eta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}) \quad (336)$$

et à remplacer chaque produit tensoriel $X \otimes Y$ par $[X, Y]$.

Ainsi, nous observons que $[\gamma \wedge \eta]$ est bien bilinéaire, naturel et anti-commutatif — avec le facteur habituel d'anti-commutation $(-1)^{pq}$. Les principales propriétés de calcul sont les suivantes⁵⁸.

$$d[\gamma_p \wedge \eta_q] = [d\gamma_p \wedge \eta_q] + (-1)^p [\gamma_p \wedge d\eta_q] \quad (337)$$

$$[\eta_q \wedge \gamma_p] = (-1)^{pq+1} [\gamma_p \wedge \eta_q] \quad (338)$$

$$(-1)^{rp} [[\gamma_p \wedge \eta_q] \wedge \mu_r] + (-1)^{pq} [[\eta_q \wedge \mu_r] \wedge \gamma_p] + (-1)^{qr} [[\mu_r \wedge \gamma_p] \wedge \eta_q] = 0 \quad (339)$$

Ces identités impliquent en particulier $[[\omega \wedge \omega] \wedge \omega] = 0$.

⁵⁸. [Sha97] SHARPE, *Differential geometry*, 1997.

RÉFÉRENCES

- [Bou71] Nicolas BOURBAKI. *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre I: Algèbres de Lie.* Seconde édition. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1285. Hermann, Paris, 1971 (cité p. 3, 15).
- [Bou72] Nicolas BOURBAKI. *Éléments de mathématique. Groupes & algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres. Chapitre III: Groupes de Lie.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349. Hermann, Paris, 1972, p. 320 (cité p. 16, 19).
- [Car23] Élie CARTAN. « Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie) ». Dans : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3^e série, 40 (1923), p. 325-412 (cité p. 1, 21, 42).
- [Car24a] Élie CARTAN. « La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle ». Dans : *L'Enseignement Mathématique* 24 (1924) (cité p. 2, 35).
- [Car24b] Élie CARTAN. « Sur les variétés à connexion projective ». Dans : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52 (1924), p. 205-241 (cité p. 22, 24).
- [Car25] Élie CARTAN. « Les groupes d'holonomie des espaces généralisés ». Dans : *Acta mathematica* 48 (1925) (cité p. 28).
- [Car27] Élie CARTAN. « La théorie des groupes et la géométrie ». Dans : *L'Enseignement Mathématique* 26 (1927) (cité p. 2).
- [Car30] Élie CARTAN. *La théorie des groupes finis & continus & l'analysis situs.* fre. Gauthier-Villars, 1930 (cité p. 15).
- [Car35] Élie CARTAN. *La Méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus & les espaces généralisés.* Hermann, Paris, 1935 (cité p. 16).
- [Car36] Élie CARTAN. « La Topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie ». Dans : *L'Enseignement Mathématique* 35 (1936), p. 177-200 (cité p. 15).
- [Fab76] Richard L. FABER. « The Lie bracket and the curvature tensor ». Dans : *Enseign. Math. (2)* 22.1-2 (1976), p. 29-34 (cité p. 29).
- [Kna02] Anthony W. KNAPP. *Lie groups beyond an introduction.* Second. T. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002 (cité p. 3, 7).
- [Mil63] John W. MILNOR. *Morse theory.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963 (cité p. 1).
- [Ser06] Jean-Pierre SERRE. *Lie algebras and Lie groups.* T. 1500. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006 (cité p. 15).
- [Sha97] Richard W. SHARPE. *Differential geometry.* T. 166. Graduate Texts in Mathematics. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program, With a foreword by S. S. Chern. Springer-Verlag, New York, 1997 (cité p. 2, 5, 6, 16, 22, 33, 48).
- [Spi99] Michael SPIVAK. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Third. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1999 (cité p. 5).
- [Thu97] William P. THURSTON. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.* T. 35. Princeton Mathematical Series. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997 (cité p. 11).
- [Wis09] Derek K. WISE. « Symmetric space Cartan connections and gravity in three and four dimensions ». Dans : *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 5 (2009), Paper 080, 18 (cité p. 14).