

Fractales attractives

De belles images pour forger l'intuition

Antonin Guilloux et Raphaël Alexandre
IMJ-PRG et OURAGAN

17 décembre 2020

- 1 Introduction I: Ensembles de Julia, Mandelbrot
- 2 Introduction II: Ensembles limites kleinéens
- 3 Ensembles limites dans la sphère \mathbf{S}^3 : de quoi parle-t-on?
- 4 Calculer des ensembles limites
- 5 Calculs pour les groupes de triangles
- 6 Conclusion: et les déformations?

Section 1

Introduction I: Ensembles de Julia, Mandelbrot

Ensembles de Julia

La dynamique de $f_c : z \rightarrow z^2 + c$, pour $c \in \mathbf{C}$

- Si $z_0 \in \mathbf{C}$, on définit $z_{n+1} = f_c(z_n)$. Deux comportements possibles: soit c 'est bornée, soit ça tend vers l'infini.
- $\{z_0 \mid z_n \text{ bornée}\}$ s'appelle l'*ensemble de Fatou*.
- La frontière s'appelle l'*ensemble de Julia*, J_c .

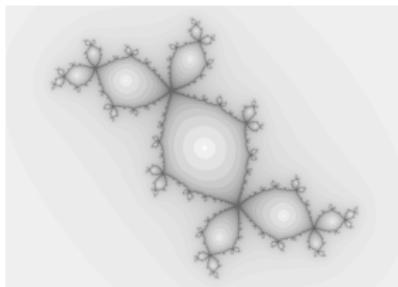


Figure: Un ensemble de Julia, le *lapin de Douady*, par Raphaël

C'est beau! Et ce n'est pas anodin...

Calcul d'images, un moteur de la recherche

- Dès la définition (Fatou, 1904) il y a des représentations.
- C'est une source non négligeable de fascination pour ce domaine d'études.
- Avec les ordinateurs, on utilise différentes propriétés pour obtenir de plus en plus efficacement ces images.

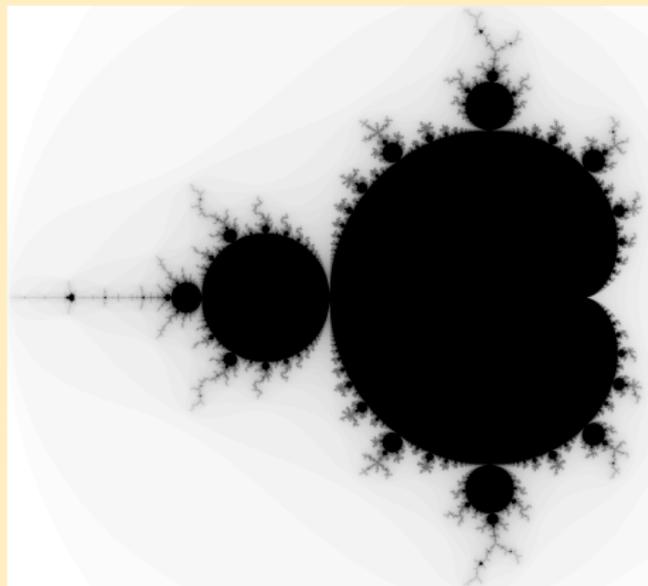
Propriétés et méthodes de calcul

- J_c est le plus petit fermé invariant par f_c (de cardinal au moins 3).
- Pour (presque) tout point z , J_c est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite inverse $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_c^{-n}(z)$. C'est une des méthodes de représentation.
- Aujourd'hui, le calcul d'un J_c est rapide.

Déformations

Une des questions est de comprendre ce qui se passe pour J_c quand c varie: l'ensemble se déforme avec c .

L'ensemble de Mandelbrot: ensemble des valeurs c telles que l'orbite de 0 par f_c est bornée



L'ensemble de Mandelbrot,
par Raphaël

Déformations

Déformations des Julia

- L'application $c \rightarrow J_c$ n'est pas forcément continue (phénomène d'implosion parabolique).
- Efficacité du calcul: des applets permettent de calculer en direct J_c pour des valeurs de c fixées par la position de la souris.

Section 2

Introduction II: Ensembles limites kleinéens

Une généralisation rationnelle

Il est possible d'étudier les mêmes notions pour des applications rationnelles de \mathbf{C} dans \mathbf{C} .

Dans ce cas, il est plus raisonnable de considérer aussi l'infini et de plutôt travailler dans la sphère de Riemann \mathbf{CP}^1 .

Les images sont alors à considérer comme dans une sphère plutôt qu'un plan. On passe de l'une à l'autre par projection stéréographique.

Ca donne naissance aux **ensembles limites kleinéens**.

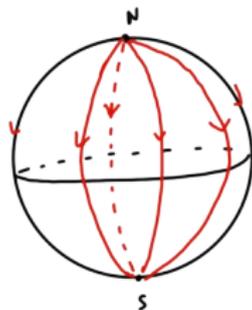
Ensembles limites kleinéens

Si Γ est un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbf{C})$, il agit sur la sphère \mathbf{S}^2 . On définit alors son ensemble limite Λ_Γ comme **le plus petit fermé invariant**.

Dynamique contractante

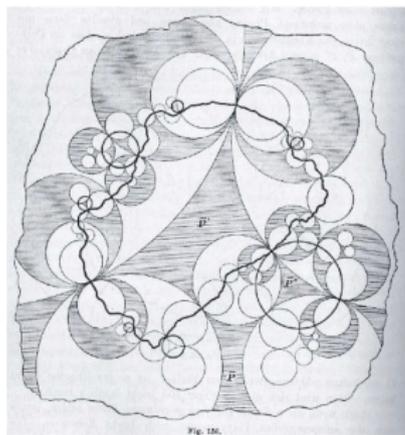
Une infinité d'éléments $\gamma \in \Gamma$ sont conjugués à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} t & \\ & 1/t \end{pmatrix}$.

Une telle matrice agit sur la sphère par dynamique Nord-Sud: il y a un point fixe attracteur et un point fixe répulseur. Ces deux points fixes sont des points de Λ_Γ .

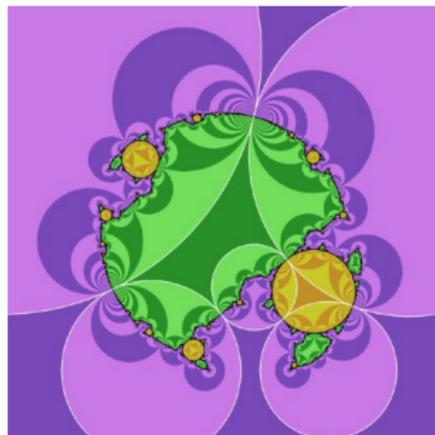


Représentations d'ensembles limites kleinéens

La dynamique contractante donne une piste pour la représentation: déterminer un nombre suffisant de points fixes attractifs. D'autres méthodes sont possibles et des représentations ont été faites dès l'invention de ces ensembles.



(a) Figure originale (circa 1900)



(b) Figure moderne

Figure: Visions originale et moderne sur un ensemble limite kleinéen, voir Audin-Chéritat sur Images des mathématiques

Et maintenant?

Des sous-groupes discrets de $SU(2, 1)$ agissent sur la sphère \mathbf{S}^3 , avec des propriétés de dynamiques contractantes.

Perspectives

- 1 Peut-on représenter leurs ensembles limites?
- 2 Est-ce que ça a un intérêt mathématique?
- 3 Peut-on gérer les déformations?

Section 3

Ensembles limites dans la sphère S^3 : de quoi parle-t-on?

De S^2 à S^3 ...

La sphère S^3 dans le plan complexe C^2 peut être décrite par :

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 1.$$

C'est le bord du domaine D^2 défini par:

$$x\bar{x} + y\bar{y} < 1.$$

- Quelles sont les biholomorphismes conformes de C^2 qui préservent le domaine D^2 et donc S^3 ?
- Ce sont les transformations du groupe $PU(2, 1)$.

Calcul du groupe $PU(2, 1)$

Le groupe $PU(2, 1)$ s'obtient en regardant le domaine D^2 dans l'espace projectif $\mathbf{CP}^2 = \{\text{droites de } \mathbf{C}^3\} = (\mathbf{C}^3 - \{0\}) / (u = \lambda u)$.

- D^2 peut être décrit par l'équation

$$x\bar{x} + y\bar{y} < z\bar{z}$$

avec $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

- La forme $x\bar{x} + y\bar{y} - z\bar{z}$ est préservée par le groupe $PU(2, 1)$ (définition).
- Le domaine D^2 avec son groupe de transformations conformes $PU(2, 1)$ est le *plan hyperbolique complexe* $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}^2$.

Trois classes dynamiques

Une transformation $f \in \text{PU}(2, 1)$ appartient à l'un des trois types suivants :

- Les transformations elliptiques: f fixe (au moins) un point de D^2 .
- Les transformations paraboliques: f fixe un unique point de S^3 et aucun point de D^2 .
- Les transformations loxodromiques ou hyperboliques: f ne fixe aucun point de D^2 et $\inf\{\text{dist}(x, f(x))\} > 0$ pour les $x \in D^2$.

Cela donne des dynamiques distinctes sur S^3 :

- Les transformations elliptiques (fixent un point de D^2) sont des rotations sur S^3 .
- Les transformations hyperboliques ont une dynamique Nord-Sud : il n'y a que deux points fixes dans S^3 et l'un est répulsif et l'autre est attractif. La convergence est très rapide.
- Les transformations paraboliques ont une dynamique moins forte qui ressemble à celle d'une transformation hyperbolique où les deux points fixes se confondent. La convergence est lente en comparaison.

L'ensemble limite d'un sous-groupe $\Gamma \subset \text{PU}(2, 1)$ est l'ensemble des points d'adhérence dans S^3 de l'orbite d'un point de D^2 :

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot p} \cap S^3, \quad p \in D^2.$$

On suit donc un point de D^2 :

- Si la transformation est elliptique alors il n'atteindra pas asymptotiquement S^3 .
- Si la transformation est parabolique, il atteindra asymptotiquement S^3 mais lentement.
- Si la transformation est hyperbolique, il convergera vers le point attractif rapidement.
- $L(\Gamma)$ est un invariant dynamique important ! Lorsque $L(\Gamma)$ est une fractale, Γ est discret.

Section 4

Calculer des ensembles limites

Est-ce difficile ?

- La définition de $L(\Gamma)$ suggère qu'il suffit de regarder l'orbite d'un point de D^2 et de prendre ses points d'accumulations, non?
- Une telle orbite est énorme ! Il y a une croissance exponentielle du nombre de transformations selon la longueur des mots de Γ .
- $L(\Gamma)$ est Γ -invariant, donc itérons un point de $L(\Gamma)$?
- Attention à la propagation des erreurs !

La stratégie

La stratégie est mixte :

- On commence par un point de D^2 et on cherche des points d'accumulations dans S^3 .
- Pour cela on prend des transformations loxodromiques que l'on itère : ça converge vite ! (On sélectionne les loxodromiques avec la fonction de Goldman.)
- On enrichit le résultat en itérant Γ sur les points obtenus, en faisant attention à la propagation des erreurs.

Quelques problèmes insolubles...

- Trier, trier, trier ! On ne sait jamais *a priori* si on a pris des transformations de Γ vraiment différentes : problème d'équivalences de mots non polynomial.
- La visualisation de centaines de milliers de points en 3D.

Section 5

Calculs pour les groupes de triangles

Le nœud de huit

Le groupe fondamental du nœud de huit est donné par:

$$\Gamma_8 = \langle a, b \mid aabABBAb = e \rangle.$$

- Si l'on pose $a^4 = b^3 = (Ab)^3 = e$ cela implique :

$$aabA BB Aba = A Ab Ab Ab a = Aa = e.$$

- Donc on a un morphisme $\Gamma_8 \rightarrow \{a, b \mid a^4 = b^3 = (Ab)^3 = e\}$.
- Ce dernier est le *sous-groupe des mots pairs du groupe de triangle (abstrait) (3,3,4)*.
- On peut représenter $\{a, b \mid a^4 = b^3 = (Ab)^3 = e\}$ dans $PU(2, 1)$ par une famille à deux paramètres réels.

Famille de représentations

Ces représentations sont construites en prenant $X, Y \in \text{PU}(2, 1)$ telles que

$$X^3 = Y^3 = (XY)^4 = id.$$

Il y a deux paramètres réels de libertés supplémentaires qui décrivent donc ces représentations. Ils sont exprimés par

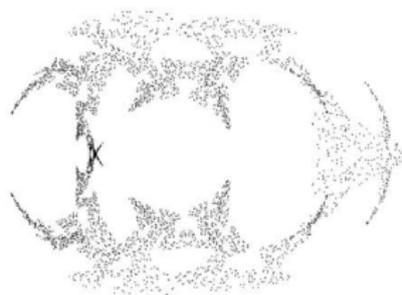
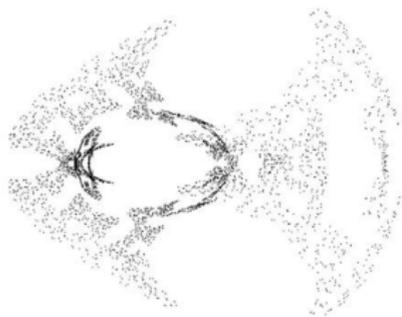
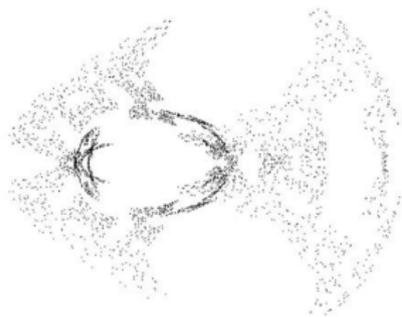
$$\text{tr}(X^{-1}Y) \in \mathbf{C}.$$

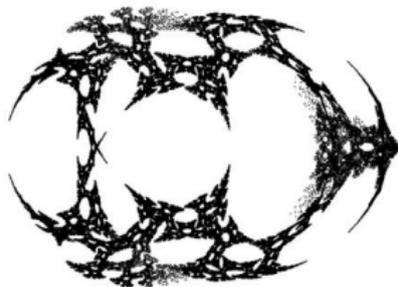
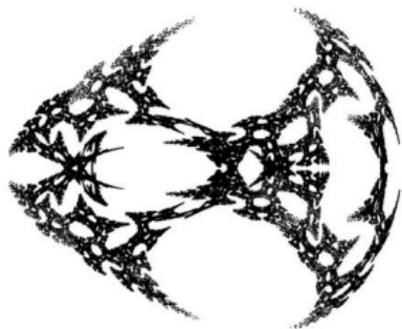
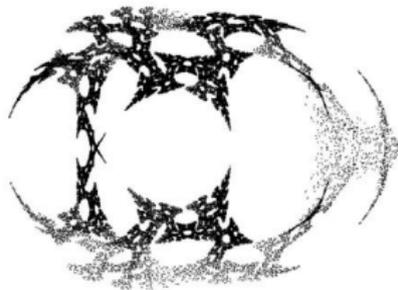
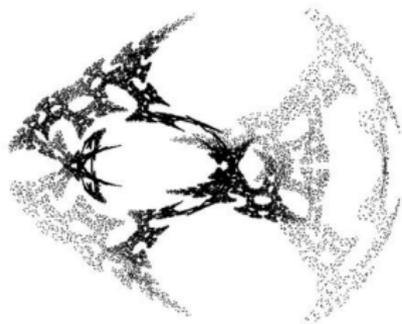
Démo

On regarde par exemple la représentation dans $PU(2, 1)$ qui est *parabolique unipotente au bord*. C'est-à-dire avec $\text{tr}(X^{-1}Y) = 3$.

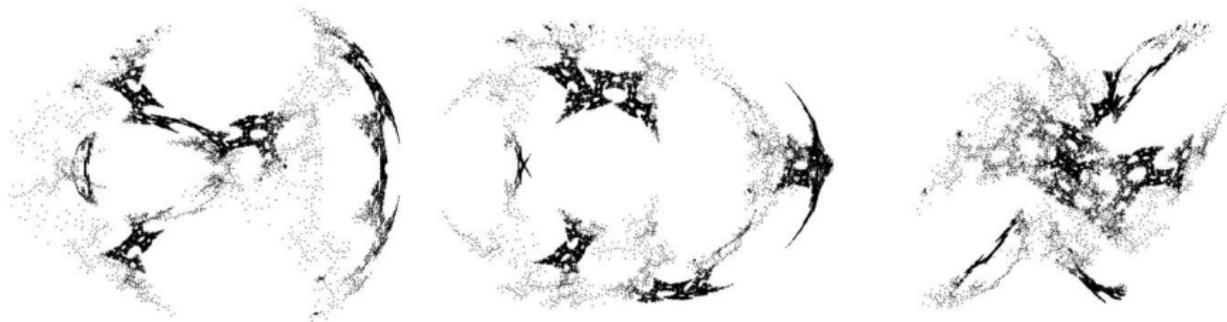
On imprime les étapes de la simulations :

- ① Tout d'abord en prenant les points d'accumulations d'une orbite. (Rendement mauvais mais qualité excellente.)
- ② En itérant dessus un petit nombre de symétries bien choisies (X, Y, XY entre autres). (Rendement excellent et qualité excellente.)
- ③ On itère ensuite un plus grand nombre de transformations de Γ_8 dessus. (Bon rendement mais qualité moyenne.)
- ④ On refait passer un tour d'un petit nombre de symétries. (Bon rendement et bonne qualité.)

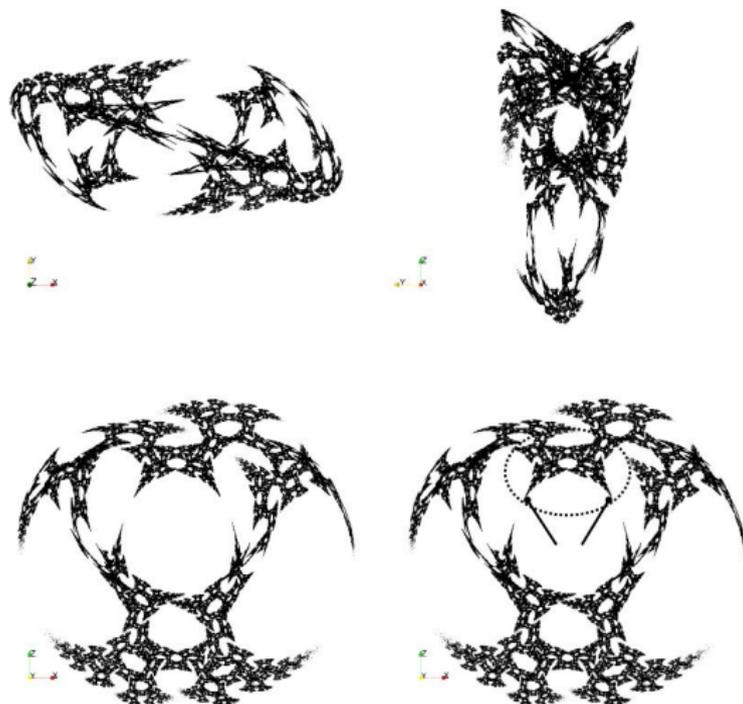


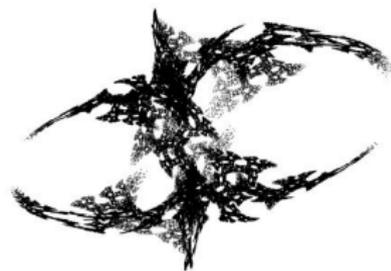
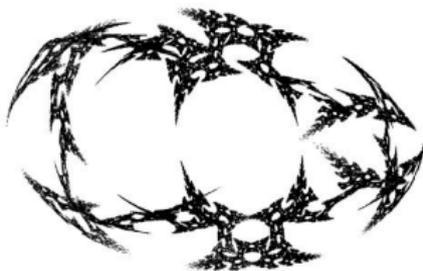


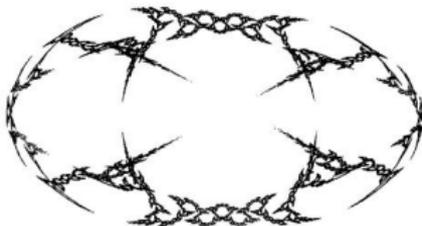
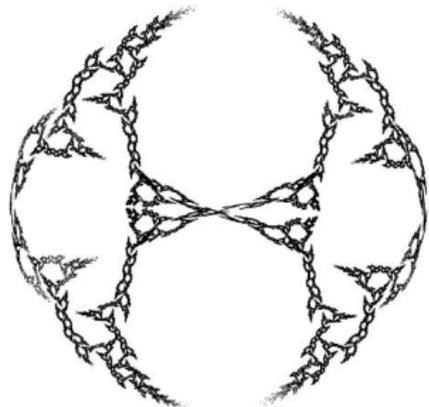
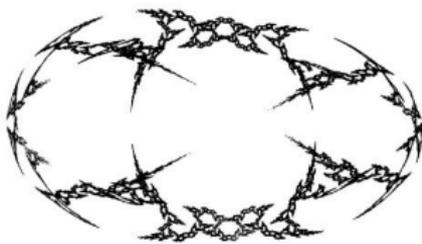
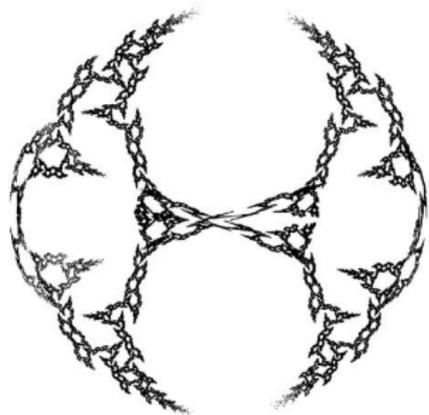
Lors de la troisième étape, choisir des mots de longueur trop longue donne des points *loins* dans la fractale.



La fractale est un invariant dynamique qui permet (expérimentalement) de reconnaître visuellement un groupe de triangles !







Section 6

Conclusion: et les déformations?

Des déformations

On peut utiliser les techniques précédentes, en particulier dans le cas $\Lambda(3, 3, 4)$, pour comprendre les déformations: si on enlève la condition de parabolicité unipotente, on a un ensemble de paramètres qui est un domaine du plan.

Pouvoir faire suffisamment de calculs suffisamment précis permet de suivre les déformations:

Un outil expérimental (prototype)

A Landscape of Limit Sets