Représentations de 3-variétés dans $\mathrm{PU}(2,1)$

Des fractales aux groupes de triangles

Raphaël ALEXANDRE

IMJ-PRG, SU, etc.

10 juin 2021

Section 1

Quelques directions très générales

Soit G un groupe de Lie agissant transitivement sur une variété lisse X ($X = G/H$). Soit M une variété lisse et $\pi_1(M)$ son groupe fondamental.

- M est-elle difféomorphe à $\Gamma\backslash U$ avec $U \subset X$ et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret ?
- On aurait une développante $D\colon \widetilde{M} \to U$ qui est un revêtement et un morphisme d'holonomie $\rho\colon \pi_1(M) \to \Gamma$.

Partons maintenant d'une représentation $\rho\colon \pi_1(M) \to G$.

- Son image est-elle discrète ?
- Peut-on trouver $U \subset X$ tel que $\Gamma \backslash U$ soit une variété lisse ?
- Est-ce M ?
- En fait, c'est même très difficile de trouver des représentations ρ.
- Il n'existe pas de procédure raisonnable pour prouver la discrétude d'un sous-groupe.
- Le calcul de U et du potentiel quotient $\Gamma \backslash U$ sont de vrais défis.
- Parfois on cherche des factorisations $\pi_1(M) \to \Lambda \to G$.

Section 2

Géométrie CR sphérique

La sphère $\mathbf{S}^3$ dans le plan complexe $\mathbf{C}^2$ peut être décrite par :

$$|x|^2 + |y|^2 = 1.$$

C'est le bord du disque complexe D^2 :

$$|x|^2 + |y|^2 < 1.$$

- $\mathrm{PU}(2,1)$ est le groupe des biholomorphismes conformes de $\mathbf{C}^2$ qui préservent le domaine D^2 (et donc $\mathbf{S}^3$).

Le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ s'obtient en regardant le domaine D^2 dans le plan projectif $\mathbf{CP}^2$.

- D^2 peut être décrit par l'équation

$$|x|^2 + |y|^2 < |z|^2.$$

- La forme $x\overline{x} + y\overline{y} - z\overline{z}$ est préservée par le groupe $\mathrm{PU}(2,1)$ (définition).
- Le domaine D^2 avec son groupe de transformations conformes $\mathrm{PU}(2,1)$ est le *plan hyperbolique complexe* $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}} = D^2$.

Une transformation $f \in \mathrm{PU}(2,1)$ appartient à l'une des trois dynamiques (des itérées) suivantes :

- Elliptique : f fixe (au moins) un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$.
- Parabolique : f fixe un unique point de $\mathbf{S}^3$ qui est attractif.
- Loxodromique : f fixe deux points de $\mathbf{S}^3$, l'un fortement attractif, l'autre fortement répulsif.

L'ensemble limite d'un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{PU}(2,1)$ est l'ensemble des points d'adhérence dans $\mathbf{S}^3$ de l'orbite d'un point de $\mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}$:

$$L(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot p} \cap \mathbf{S}^3,\ p \in \mathbf{H}^2_{\mathbf{C}}.$$

- $L(\Gamma)$ est un compact minimal invariant.
- Si $L(\Gamma)$ n'est pas lisse alors Γ est discret.
- La plupart du temps $L(\Gamma)$ est l'adhérence des points fixes loxodromiques.

Section 3

Représentations de 3-variétés hyperboliques dans $\mathrm{PU}(2,1)$

Soit M le complémentaire d'un nœud ou d'un entrelac.
Une représentation $\pi_1(M) \to \mathrm{PU}(2,1)$ est à bord unipotent si les générateurs provenant des cusps (des copies de $\mathbf{Z}^2$) sont envoyés sur des paraboliques unipotents de $\mathrm{PU}(2,1)$.

- C'est une condition forte ... mais qui permet de calculer toutes les représentations unipotentes de M. (FKR)
- Quand M est décrite par le recollement de ≤ 4 tétraèdres alors les calculs ont même été réalisés.
- On a à disposition 1653 représentations pour 51 variétés.

- Seulement $70 = 35 \times 2$ représentations (paires par conjugaison complexe dans $\mathrm{SU}(2,1)$) donnent des fractales. Elles concernent 20 variétés.
- (Extrait des planches)

- Sur les $70 = 35 \times 2$ représentations, on a trouvé parmi elles 22×2 groupes de triangles (21×2 triangles hyperboliques complexes).
- Ces représentations passent par une factorisation surjective $\pi_1(M) \twoheadrightarrow T(p,q,r) \to \mathrm{PU}(2,1)$ avec

$$T(p,q,r) = \{x, y \mid x^p = y^q = (xy)^r = e\}.$$

- Les représentations $T(p,q,r) \to \mathrm{PU}(2,1)$ étaient déjà très étudiées (on peut calculer des déformations et des uniformisations), mais leur apparition naturelle n'était pas claire.

Section 4

Quelques pistes

La factorisation $\pi_1(M) \to T(p,q,r)$ va de paire avec un remplissage de Dehn $M \to N$, où N est une variété fermée.

- Dans tous les cas connus, N n'est jamais un remplissage hyperbolique.
- Si c'était vrai en général, on aurait une stratégie très intéressante.

Le lien entre M et $T(p,q,r)$ n'est pas du tout clair :

- Parfois la représentation est uniformisable, mais pas la plupart du temps.
- Parfois M a des triangles différents $T(p,q,r)$.
- On ne sait pas quels M ont un groupe $T(p,q,r)$.

Est-ce une propriété seulement combinatoire ?